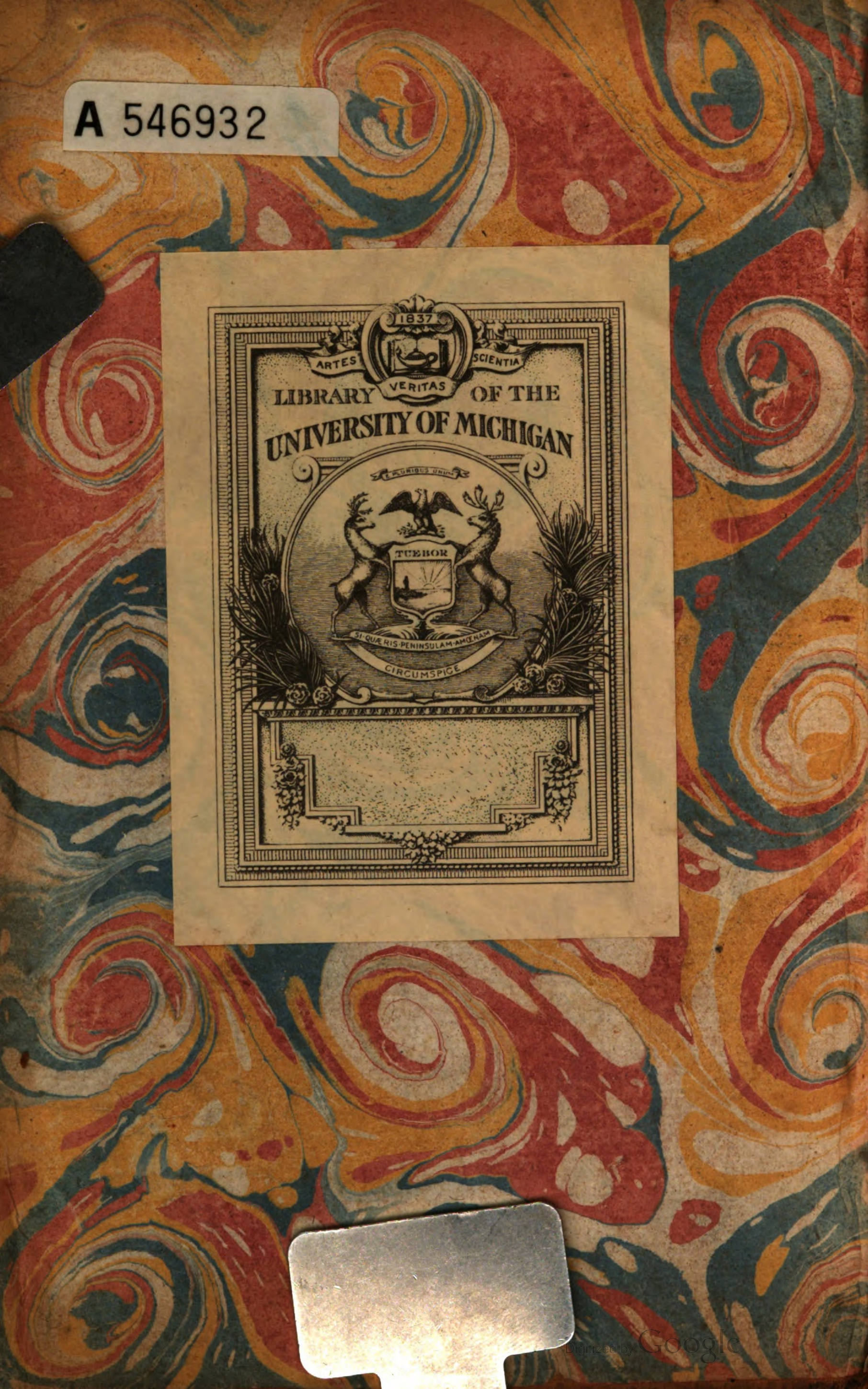

A 546932
1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



COURS DE MATHÉMATIQUES.

TOME II.

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,

ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.

TOME DEUXIEME.

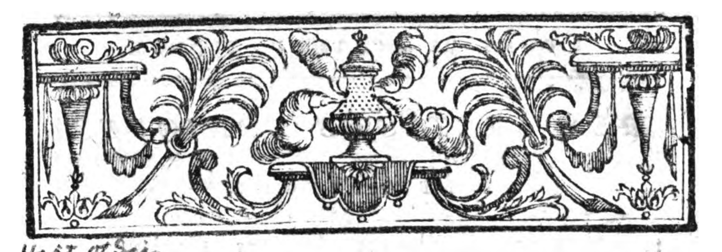


A PARIS,

Aux Dépens de RUAULT, Libraire, rue de la Harpe, près de la rue Serpente.

MDCCLXXIV.

Avec Approbation, & Privilége du Roi.



COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES.

PREMIERE PARTIE.

GÉOMÉTRIE SUBLIME, OU GÉOMÉTRIE DES COURBES.

LA Géométrie Sublime forme une ſcience auſſi vaſte qu'intéreſſante. Les Courbes les plus célèbres, & les plus utiles dans les ſciences Phyſico-Mathématiques, ſont celles qu'on appelle *Sections Coniques*, & ſur leſquelles les anciens Géometres ont beaucoup travaillé. Nous commencerons par développer leurs propriétés les plus eſſentielles, nous réſervant de parler dans la ſuite des *Courbes géométriques* d'un ordre plus élevé; de celles qu'on nomme *tranſcendantes*, & des *Courbes à double courbure*.

DES SECTIONS CONIQUES.

DÉFINITIONS.

1. NOUS appellerons *Sections Coniques les Courbes qu'on peut former sur la surface d'un cône, en coupant ce cône par des plans.* Nous allons considérer ces lignes sur un plan; nous ferons voir ensuite qu'elles sont les mêmes qu'on trouve dans le cône.

La Parabole (figure 1.) *est une Courbe, dont chaque point m est également éloigné d'un point fixe* F *qu'on appelle* Foyer, *& d'une ligne f d aussi fixe qu'on appelle* la Directrice. La ligne *f*F perpendiculaire à la Directrice & qui passe par le Foyer F, s'appelle l'*Axe* de la Parabole. Une ligne *dm* parallele à l'Axe s'appelle un *Diametre*. On nomme *Tangente* une ligne *tm* qui touche la parabole sans la couper. Une ligne P*m* perpendiculaire à l'axe & terminée à la parabole se nomme *Ordonnée*. La partie AP de l'axe, comprise entre l'ordonnée & le point A où l'axe rencontre la parabole, s'appelle *Abscisse* ou *Coupée*. La ligne *m*C perpendiculaire à la tangente au point *m* & terminée à l'axe, s'appelle la *Normale* ou la *Perpendiculaire*. La partie PC de l'axe, comprise entre l'ordonnée & la normale, s'appelle la *Sous-Normale*. *La Sous-Tangente* est la partie P*t* de l'axe, comprise entre l'ordonnée & la rencontre de la tangente. La ligne *no* parallele à la tangente *mt*, & terminée en *o* par le diametre *md*, est dite *Ordonnée* ou *Appliquée* à ce diametre. Une ligne quadruple de la distance du point A ou *m* (origine de l'axe ou du diametre) à la directrice *fd*, s'ap-

pelle le *Parametre* de l'axe ou du diametre. Enfin on nomme *Rayon Vecteur* une ligne Fm tirée du foyer à la courbe.

2. COROLLAIRE. *Puisque chaque point de la parabole est également éloigné du point* F *& de la Directrice*, l'on a AF = Af. Le point A est appellé le *Sommet* de la parabole.

3. THÉORÊME. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* Pm *est égal au produit de son abscisse* AP *par le parametre*. Soit P$m = y$, AP $= x$, Af = AF $= a$; le parametre (1.) sera $= 4a$, ou, pour abréger, $= p$. La ligne FP = AP — FA sera $= x - a$. Cela posé, le triangle rectangle FmP donne $\overline{Fm}^2 = \overline{Pm}^2 + \overline{FP}^2$, ou algébriquement (en faisant attention que Fm = md = AP + Af $= x + a$) $\overline{x+a}^2 = y^2 + \overline{x-a}^2$, ou $y^2 = \overline{x+a}^2 - (x-a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + 2ax - a^2 = 4ax = px$; donc $y^2 = px$, ce qu'il falloit démontrer. Telle est l'équation de la parabole *.

4. COROLLAIRE I. *Donc les quarrés des deux ordonnées* y, y' *sont entr'eux comme leurs abscisses* x, x'. Car par le théorême $y^2 = px$, & par la même raison $y'^2 = px'$; donc $y^2 : y'^2 :: px : px' :: x : x'$.

5. COROLLAIRE II. *Puisque* $y^2 = px$; *donc* $p : y :: y : x$, *c'est-à-dire que l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre le parametre & l'abscisse.*

6. COROLLAIRE III. *Puisque* $y^2 = px$, on a

* Si le point P étoit situé au-dessus du point F, la ligne FP seroit $= a - x$; or $\overline{x-a}^2 = \overline{a-x}^2$; donc l'équation seroit la même.

$y = \pm \sqrt{px}$; donc à chaque abscisse répondent deux ordonnées égales, l'une positive P m, l'autre négative P M.

7. COROLLAIRE IV. *Il suit du dernier Corollaire que x augmentant, y augmente;* donc les branches de la parabole s'étendent à l'infini, en s'écartant toujours de l'axe. Si l'on suppose x négative, c'est-à-dire, si l'on prend des abscisses au-dessus de a sur le prolongement de l'axe, elles auront le signe $-$ (étant prises dans un sens opposé aux positives), & l'on aura $y^2 = -x \times p = -px$; donc $y = \pm \sqrt{-px}$, quantité imaginaire qui fait voir que la parabole n'a point de branches du côté des abscisses négatives.

8. COROLLAIRE V. *Si l'on fait $x = a$, on aura $y^2 = pa = 4a \times a = 4a^2$, & $y = \sqrt{4a^2} = 2a = \frac{p}{2}$; donc l'ordonnée qui passeroit par le foyer de la parabole seroit la moitié du parametre, & la double ordonnée seroit égale au parametre entier.*

9. PROBLÊME. *Par un point donné m sur la parabole mener une tangente à cette courbe.* Du point donné ayant tiré le rayon vecteur mF, & la perpendiculaire md à la directrice, joignez les deux points d & F par la ligne Fd. Menant mt par le point m & le point i milieu de Fd, le problême sera résolu. En effet mt coupant en deux parties égales la base dF du triangle isocelle dmF, & passant par le sommet de l'angle m, est nécessairement perpendiculaire à dF; * mais de plus elle a un

* Car cette ligne a deux points également éloignés de d & de F; donc selon ce que nous avons dit dans la Géometrie, elle est perpendiculaire sur dF.

point m également éloigné de F & de d. Donc tous ses autres points q sont également éloignés de F & de d; mais si l'on tire les lignes q, q' perpendiculairement sur la directrice, on aura la perpendiculaire $q q'$ plus petite que l'oblique $q d$; donc les points q sont plus près de la directrice que du foyer; donc ils n'appartiennent pas à la parabole, qui n'a d'autre point commun avec $t m$ que le seul point m; donc cette ligne est tangente.

10. COROLLAIRE I. *Puisque $m t$ divise en deux également la base dF du triangle isoscèle $d m$F; cette ligne divisera aussi en deux parties égales l'angle $d m$F, de maniere que l'on aura F$m t$ = $d m t$ = $m t$F* (parce que ces deux derniers angles sont alternes internes entre les paralleles $d m$, tF); donc 1°. le triangle tFm est isocelle, & Ft = Fm; donc 2°. l'angle $o m$T = $d m t$ (son opposé au sommet) = F$m t$; donc si dans la concavité d'un corps formé par la révolution d'une parabole autour de son axe, on reçoit des rayons de lumiere paralleles à l'axe, ces rayons se réfléchiront tous au foyer, & réciproquement s'ils partent du foyer ils se réfléchiront parallelement à l'axe, en faisant l'angle de réflexion égal à celui d'incidence *.

11. COROLLAIRE 2. Puisque nous venons de voir que le triangle t F m est isocelle, la perpendiculaire Fi divise en deux également la base $t m$

* L'angle que le rayon Fm fait avec la tangente est complement de l'angle CmF; or l'angle que la tangente $m t$ fait avec la courbe, est évidemment infiniment petit; donc l'angle que fait Fm avec la courbe est le même que celui qu'il fait avec la tangente $m t$.

de ce triangle ; *donc une perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente de la parabole, la divise en parties égales.*

12. THÉORÊME. *La sous-normale* PC *est égale à la moitié du parametre.* Les triangles dsF, mPC ont les angles en F & C égaux : car les lignes mC, Fd perpendiculaires sur tm sont nécessairement paralleles ; ainsi les angles correspondants C & F sont égaux ; d'ailleurs les angles P & f sont droits, & les côtés Pm, fd égaux à cause du rectangle $dfPm$; donc ces triangles ont un côté égal de part & d'autre, & deux angles sur ce côté égaux ; ainsi ils sont égaux en tout, comme on l'a dit dans la Géométrie ; donc $fF =$ PC ; or $fF = 2a = \frac{p}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc $\overline{mC}^2 = \overline{Pm}^2 + \overline{PC}^2$ (propriété du triangle rectangle), ou $\overline{mC}^2 = y^2 + \frac{p^2}{4} = px + \frac{p^2}{4}$, à cause de $px = y^2$ (3) ; *donc la normale* $mC = \sqrt{(px + \frac{pp}{4})}$.

COROLLAIRE II. *Donc* $AC = AP + PC = x + \frac{p}{2}$.

13. THÉORÊME. *La sous-tangente* Pt *est double de l'abscisse* AP, *c'est-à-dire la sous-tangente* $Pt = 2x$. Car par la propriété du triangle rectangle Cmt on a (Géom. 53) $PC : Pm :: Pm : Pt$, ou $\frac{p}{2} = 2a : y :: y : Pt$; donc $Pt = \frac{y^2}{2a} = \frac{px}{2a} = \frac{4ax}{2a} = 2x$.

COROLLAIRE I. Donc le triangle mPt est égal

au parallélogramme $mPAN$; car le triangle & le parallélogramme ont même base mP, mais de plus la hauteur du triangle est double de celle du parallélogramme. Ces deux figures sont donc égales.

COROLLAIRE II. Pour mener une tangente par un point m de la parabole, ayant abaissé l'ordonnée mP, on fera $At = AP$, & par le point t & le point m menant tm, on aura la tangente demandée, puisque la sous-tangente sera $= 2AP = 2x$.

COROLLAIRE III. Donc $\overline{tm}^2 = \overline{mP}^2 + \overline{tP}^2 = y^2 + 4x^2 = px + 4x^2$; *donc la tangente* $T = \sqrt{px + 4xx}$.

14. THÉORÊME. *Le quarré de la perpendiculaire* Fi *menée du foyer sur la tangente* mt, *est égale au produit du rayon vecteur* Fm *par le quart du parametre*. Car par le sommet A menant la perpendiculaire Ai sur l'axe, les triangles semblables tAi, tmP, donnent $tA : tP :: ti : tm$; or tA est la moitié de Pt (13); donc ti est la moitié de tm; mais la perpendiculaire Fd rencontre aussi tm en i, puisque, à cause de l'angle $t = dmt$ (son alterne interne) $= tmF$ (10.), Fd divise en parties égales la base du triangle isocelle tFm. Donc iA est une perpendiculaire abaissée du sommet i de l'angle droit du triangle rectangle Fit sur l'hypothénuse Ft; donc (Géom. 55) $Ft : Fi :: Fi : FA$; donc $Ft \times FA = \overline{Fi}^2$; or $Ft = Fm$ (10); donc $Fm \times FA = \overline{Fi}^2$; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc appellant r le rayon vecteur, t la perpendiculaire à la tangente, on aura $ra = t^2$; donc pour un autre point différent de m, on aura $r'a = T^2$; donc $ra : r'a :: t^2 :$

T^2, ou $t^2 : T^2 :: r : r'$; donc $t : T :: \sqrt{r} : \sqrt{r'}$. *C'est-à-dire que les perpendiculaires menées du foyer sur les tangentes de la parabole sont proportionnelles aux racines des rayons vecteurs correspondants.* Cette proposition est utile dans l'Astronomie.

15. THÉORÊME. *Le rayon vecteur* $r = x + \frac{p}{4}$: car nous avons démontré (10) que $Fm = Ft$; mais $Ft = At + AF = x + a$ (puisque $tP = 2AP$) ; donc &c.

16. THÉORÊME. *Le parametre P d'un diametre quelconque md est plus grand que le parametre p de l'axe du quadruple de l'abscisse.* Car $P = 4md = 4Ps$; or $Ps = AP + As = x + a$; donc $P = 4x + 4a = 4x + p$.

COROLLAIRE I. *Donc le parametre de l'axe est le plus petit de tous les parametres.*

COROLLAIRE II. *Donc le parametre P d'un diametre est une ligne troisieme proportionnelle à l'abscisse & à la tangente qui répondent à l'origine m du diametre :* car cette tangente est $= \sqrt{px + 4x^2}$ (13.) ; or $x : \sqrt{px + 4x^2} :: \sqrt{px + 4x^2} : \frac{px + 4x^2}{x} = p + 4x = P$.

LEMME. *Le triangle lob* (fig. 2.) *fait par une ordonnée au diametre mo, la partie lb de l'ordonnée à l'axe, comprise entre la parabole & le diametre, & la partie bo du diametre, comprise entre la rencontre de son ordonnée & de l'ordonnée à l'axe, est egal au parallélogramme motu formé par l'axe, le diametre, la tangente & l'ordonnée au diametre* (fig. 2). Car $\overline{mP}^2 : \overline{lq}^2 :: AP$:

$Aq :: AP \times Pm : Aq \times Pm :: PmnA : qbnA$; mais les triangles mPt, luq semblables, parce qu'ils ont leurs côtés paralleles, sont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, ou comme $\overline{mP}^2 : \overline{lq}^2$; donc $mPt : lqu :: PmnA : qbnA$, ou (*alternando*) $mPt : mPnA :: luq : bqnA$; or $mPt = PmnA$ (13); donc $lqu = qbnA$. Si de ces deux dernieres figures on retranche le Trapeze commun $bouq$, il restera $lob = uonA = uomt$, en ajoutant le triangle Ait & retranchant $min = Ait$ (puisque $At = AP = mn$, que les angles en n & A sont droits, & les angles en i égaux, étant opposés au sommet; de maniere que ces triangles ont un côté égal, & les angles sur ce côté égaux de part & d'autre, ce qui les rend égaux en tout); donc, &c.

17. THÉORÊME. *Le quarré d'une ordonnée lo = y, à un diametre mb, est égal au produit de l'abscisse mo (x') par le parametre P de ce diametre.* Les triangles lbo, mPt semblables (à cause qu'ils ont leurs côtés paralleles), donnent $\overline{lo}^2 : \overline{tm}^2 :: lob : mPt :: omtu : mnAP$ (Lemme précédent.); or les parallélogrammes $omtu$, $mnAP$ étant compris entre mêmes paralleles no, tu, ont même hauteur & sont entre eux comme leurs bases; $tu = om$ & AP; donc $\overline{lo}^2 : \overline{tm}^2 :: mo : AP$, ou $y^2 : x' :: px + 4x^2 : x$ (en alternant, & substituant les valeurs algébriques); donc $y^2 = x' \times \frac{px + 4x^2}{x} = x' \times \overline{p + 4x} = Px'$, à cause de $p + 4x = P$ (16.).

COROLLAIRE I. *Donc pour une autre ordonnée Y*

& son abscisse x'', *on aura* $Y^2 = Px''$; donc $y^2 : Y^2 :: Px' : Px'' :: x' : x''$; *c'est-à-dire, que les quarrés des ordonnées à un diametre sont entre eux comme les abscisses correspondantes.*

COROLLAIRE II. *De ce que* $y^2 = Px'$, *il suit :* 1°. *qu'on a* $y = \pm \sqrt{Px}$; c'est-à-dire, qu'à chaque abscisse x' il répond deux ordonnées égales, l'une positive ol, l'autre négative os. 2°. Que l'équation aux diametres est la même que l'équation à l'axe ; mais les ordonnées aux diametres leur sont obliques, tandis que les ordonnées à l'axe lui sont perpendiculaires.

18. PROBLÊME. *Décrire une parabole.* De l'équation $px = y^2$, on tire $x : y :: y : p$. Ainsi cherchant une moyenne proportionnelle y entre chaque abscisse AP & le parametre p que je suppose connu, on élevera cette moyenne proportionnelle Pm perpendiculairement à l'axe au point P, on prolongera chaque mP jusqu'à ce que $Pm' = Pm$, & faisant passer une courbe par tous les points m, m', on aura la parabole cherchée : car on aura toujours $x : y :: y : p$, & $y^2 = px$, équation à la parabole. On peut prendre p arbitrairement, par exemple, d'un pouce, d'un pied, &c.

Autre maniere par un mouvement continu. En se servant d'une équerre ffd ou xdh (fig. 3.) : on attache sur un point quelconque x d'une des branches de cette équerre l'extrémité d'un fil d'une longueur égale à xd, & ayant attaché l'autre extrémité en f, on applique par le moyen d'un stilet m une partie du fil contre xd, & tenant le fil tendu, on fait glisser l'autre branche de l'équerre le long de la directrice fd, le stilet m trace dans ce mouvement la parabole am; car on a toujours $fm = md$.

19. PROBLÊME. *Étant donnée une parabole am, trouver le parametre p.* Cherchez une troisieme proportionnelle à une abscisse ap, & à son ordonnée qp, vous aurez le parametre cherché ; car l'équation $y^2 = xp$ donne $x : y :: y : p$.

Autre maniere : ayant tiré la corde aq, menez par l'extrémité q de cette corde la perpendiculaire qc, la ligne pc sera le parametre demandé : car par la propriété du triangle rectangle aqc, l'on a $pa : qp :: qp : pc$, ou $x : y :: y : p$, d'où l'on tire $y^2 = xp$, équation à la parabole.

20. PROBLÊME. *Trouver l'équation de la parabole par rapport à la convexité, ou relativement à une tangente* An *perpendiculaire à l'axe au point* A (fig. 2.). Soit A$n = x$, $nm = y$. Par la propriété de la parabole $\overline{Pm}^2 = \overline{An}^2 = p \times AP = p \times nm$, ou $x^2 = py$. Ainsi dans l'équation à l'axe il suffit de changer y en x, & réciproquement pour avoir l'équation de la parabole par rapport à sa convexité.

21. PROBLÊME. *Quarrer la demi-parabole acb* (fig. 4.). Par le point c, tirez la tangente ct, & menant les lignes pc, fd très-proches l'une de l'autre & paralleles à l'axe, menez par les points r & c les lignes cb, mrn perpendiculaires au même axe, considérant la portion rc de la courbe comme une partie infiniment petite de la tangente, les triangles semblables rcd, cbt donnent $bt : bc :: rd : dc$; mais $bt = 2ab = 2fd$; & $rd = mb$; donc $2fd : bc :: mb : dc$, & $2fd \times dc = bc \times mb$; donc le rectangle $mncb$ est double du rectangle extérieur $pfdc$; donc chaque élément de l'espace intérieur est double de son élément correspondant dans l'espace extérieur ;

donc l'espace parabolique *acb* est double de l'espace extérieur *apc* : mais ces deux espaces pris ensemble sont égaux au parallélogramme *apcb*; Donc l'espace parabolique *acb* est les deux tiers du parallélogramme correspondant, & l'espace extérieur *pac* en est le tiers.

REMARQUE I. Nous avons supposé que l'élément de l'espace parabolique étoit égal au rectangle *mbnc*, tandis qu'il est plus petit de la quantité *nrc*; mais comme *nr* & *cn* sont des infiniment petits, le triangle *cnr* produit de $\frac{cn}{2}$ par *rn*, sera un infiniment petit du second ordre; qu'on néglige devant l'infiniment petit du premier ordre *mbrc*. Par la même raison nous avons pris *pfcd* pour l'élément de l'espace extérieur.

REMARQUE II. Dans toutes les Courbes, dont la sous-tangente aura un rapport constant avec l'abscisse, on pourra de même trouver le rapport de chaque élément *bmrd*, ou *bmnc* de l'espace intérieur à chaque élément correspondant de l'espace extérieur, & par conséquent trouver le rapport de l'espace intérieur à l'extérieur; donc on pourra quarrer toutes les Courbes qui sont dans ce cas. Par quarrer, nous entendons ici trouver la surface.

Du Cercle de l'Ellipse & de l'Hyperbole.

22. PROBLÊME. Dans un cercle dont le diametre $ab = 2a$ (fig. 5.), le quarré y^2 d'une ordonnée quelconque *pm* est égal au rectangle des abscisses *ap* (x), *pb* ($2a - x$) : car (Géom. 53.) $ap : pm :: pm : pb$, ou $x : y :: y : 2a - x$; donc $y^2 = 2ax - x^2$. Telle est l'équation du

cercle ; en comptant les abſciſſes depuis l'origine a du diametre ; mais ſi l'on compte les abſciſſes depuis le centre c, en faiſant $cp = x$, on aura $ap = ac - cp = a - x$, $bp = bc + cp = a + x$; donc $ap \times pb = y^2 = a^2 - x^2$, autre équation au cercle.

COROLLAIRE I. Donc $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$; *c'eſt-à-dire à chaque abſciſſe* cp *répondent deux ordonnées égales, l'une poſitive* pm, *l'autre négative* pm'.

COROLLAIRE II. *Si l'on fait* $cp = ca$ *ou* cb, *on aura* $y = \pm \sqrt{aa - aa} = \pm \sqrt{o} = \pm o$, *& ſi l'on ſuppoſe* x *ou* $-x$ *(car le quarré de* x *ou de* $-x$ *eſt toujours le même) plus grande que* a, *par exemple*, $= a + d$; *l'on aura* $y^2 = a^2 - x^2 = a^2 - a^2 - 2ad - dd = -2ad - d^2$; donc y ſera alors $= \pm \sqrt{-2ad - d^2}$, quantité imaginaire qui fait voir que le cercle eſt terminé en a & en b, extrémités du diametre, ce qu'on ſait d'ailleurs.

COROLLAIRE III. *Puiſque* $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, *ſi, en ſuppoſant le diametre* $= 2$, par exemple, *& le rayon* $= 1$, *on prend ſucceſſivement pluſieurs abſciſſes* $cp = 0$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, &c. *& que pour chaque abſciſſe on calcule la valeur correſpondante de* y, *en faiſant* pm, pm', &c. *égales aux valeurs trouvées ; qu'on faſſe la même choſe du côté de* b, *& qu'on faſſe paſſer une courbe par tous les points* m, m', *on aura un cercle d'autant plus exact qu'on aura pris les ordonnées plus près les unes des autres, & qu'on aura calculé leurs valeurs avec plus d'exactitude* : or l'on peut trouver ces valeurs auſſi approchées que l'on voudra, par le moyen des décimales.

23. DÉFINITIONS. *L'Ellipſe eſt une courbe*

a m A *m'* (fig. 6.) *telle que la somme des lignes m f*, *m* F *tirées de chacun de ses points à deux points fixes f*, F *qu'on appelle* Foyers, *est toujours égale à son grand axe a* A. *L'Hyperbole est une courbe a m* (fig. 7.), *telle que la différence des lignes m f*, *m* F *tirées de chacun de ses points m aux points fixes f*, F *qu'on appelle Foyers*, *est égale à son premier axe a* A. Dans l'Ellipse on appelle *second axe* ou *petit axe* la ligne *b* B qui coupe en deux parties égales & perpendiculairement le grand axe *a* A : on appelle *excentricité* dans l'Ellipse & l'Hyperbole la distance C*f*=C F du milieu du premier axe A *a* (ce milieu est le centre de la courbe), à chaque foyer. Mais dans l'Hyperbole le second axe *b* B est le double de C*b*, côté d'un triangle rectangle, dont l'hypothénuse *a b* = C*f*, & l'autre côté C*a* est la moitié du premier axe *a* A. Les lignes P*m*, *m p* tirées de chacun des points *m* de l'Ellipse ou de l'Hyperbole perpendiculairement sur le premier ou le second axe, sont les ordonnées de ces axes ; les parties de l'axe *a* P, A P sont les abscisses du premier axe. On appelle *parametre* d'un axe une troisieme proportionnelle à cet axe & à l'autre axe. Nous ferons dans la suite le premier demi-axe *a* C d'une Ellipse ou d'une Hyperbole $= a$, le petit demi-axe $= b$, l'excentricité C$f = c$; l'ordonnée P$m = y$, l'abscisse aP $= x$; ainsi PA $= 2a - x$ dans l'Ellipse, mais PA $= 2a + x$ dans l'Hyperbole. Donc le produit des abscisses est $= 2ax - x^2$ dans l'Ellipse, & $= 2ax + x^2$ dans l'Hyperbole. Mais en comptant les abscisses depuis le centre C, & faisant CP $= x$, on a P$a = a - x$, & PA $= a + x$ dans l'Ellipse ; au contraire dans l'Hyperbole Pa =

$= x - a$, & $PA = x + a$; donc le produit des abſciſſes ſera dans ce cas $aa - xx$ pour l'Ellipſe & $x^2 - a^2$ pour l'Hyperbole.

24. THÉORÊME. *Dans l'Ellipſe* (fig. 8.) *le quarré du petit demi-axe eſt moyen proportionnel entre les diſtances d'un des foyers f ou F aux extrémités a & A du grand axe.* Car $af = aC - fC = a - c$, & $Af = fC + CA = a + c$; or le triangle rectangle BfC donne $\overline{BC}^2 = \overline{Bf}^2 - \overline{Cf}^2$; mais $Bf = BF$, car les triangles BCf, BCF ont les deux côtés qui comprennent l'angle droit égaux, ce qui (Géom. 50.) les rend égaux; donc $Bf = BF$, mais (23.) $Bf + BF = 2a$; donc $Bf = a$ & $\overline{Bf}^2 = a^2$; donc l'équation $\overline{BC}^2 = \overline{Bf}^2 - \overline{Cf}^2$ devient $b^2 = a^2 - c^2 = \overline{a-c} \times \overline{a+c} = af \times fA$; donc $a - c : b :: b : a + c$.

25. THÉORÊME. *La même choſe a lieu dans l'Hyperbole* (fig. 7.); car le triangle rectangle BaC donne $\overline{BC}^2 = \overline{aB}^2 - \overline{Ca}^2$; or (23.) $aB = Cf = c$; donc $b^2 = c^2 - a^2 = \overline{c-a} \times \overline{c+a}$; donc $c - a : b :: b : c + a$.

26. THÉORÊME. *Dans l'Ellipſe le quarré d'une ordonnée quelconque au premier axe* (fig. 6.), *eſt au produit de ſes abſciſſes comme le quarré du petit demi-axe au quarré du demi grand axe.* Puiſque $mf + mF = 2a$ (23.), appellant $2d$ la différence de mF à mf, on aura le plus petit rayon vecteur $fm = a - d$, mais le plus grand rayon vecteur Fm ſera $= a + d$; * donc $\overline{fm}^2 = a^2 -$

* Car nous avons démontré (voyez les Équations) dans le calcul, que la ſomme de deux quantités étant donnée, la plus grande eſt égale à la moitié de la ſomme

$2ad + d^2$, & $\overline{Fm}^2 = a^2 + 2ad + d^2$: mais $fP = Cf - CP = c - x$, * & $FP = c + x$ en comptant les abſciſſes du centre C. Or les triangles rectangles mPf, mPF donnent $\overline{fm}^2 = \overline{mP}^2 + \overline{fP}^2$, $\overline{mF}^2 = \overline{Pm}^2 + \overline{PF}^2$; donc on aura les équations

$$a^2 - 2ad + d^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$$
$$a^2 + 2ad + d^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

retranchant la premiere de la ſeconde, l'on trouve $4ad = 4cx$, d'où l'on tire $d = \frac{4cx}{4a} = \frac{cx}{a}$ & $d^2 = \frac{c^2x^2}{a^2}$. Subſtituant ces valeurs de d & de d^2 dans la premiere équation, il viendra $a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$. Effaçant de part & d'autre la quantité $-2cx$ & tranſpoſant, on aura $a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2$, & en ôtant la fraction, $\overline{a^2 - c^2} \times a^2 - a^2 \times x^2 + c^2 \times x^2 = a^2y^2$: faiſant attention que $a^2 - c^2 = b^2$ (24.), & que par conſéquent $- a^2x^2 + c^2 \times x^2 = -b^2 \times x^2$, on verra facilement que notre équation devient $b^2 \times a^2 - x^2 \times b^2 = a^2y^2$, ou $b^2 \times \overline{a^2 - x^2} = a^2y^2$, d'où l'on tire $y^2 : a^2 - x^2 :: b^2 : a^2$. Ce qu'il falloit démontrer.

ſomme, plus la moitié de la différence, la plus petite étant égale à la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence.

* Si le point P étoit plus éloigné du centre que le point f, l'on auroit $fP = x - c$; mais l'équation ſeroit toujours la même, parce que $\overline{c - x}^2 = \overline{x - c}^2$.

&

27. THÉORÊME. *La même chose a lieu dans l'Hyperbole* (fig. 7.) : car puisque (23.) $Fm - fm = 2a$, en appellant $2q$ la somme $fm + Fm$, on aura le plus petit rayon vecteur $fm = q - a$, & $Fm = q + a$; mais les triangles rectangles fmP, FmP donnent $\overline{fm}^2 = \overline{Pm}^2 + \overline{fP}^2$, $\overline{Fm}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{Pm}^2$, d'où l'on tire les deux équations suivantes :

$$q^2 - 2aq + a^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$$
$$q^2 + 2aq + a^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2.$$

Retranchant la premiere de la seconde, le premier membre du premier membre, le second du second, il vient $4aq = 4cx$, d'où l'on tire $q = \frac{4cx}{4a} = \frac{cx}{a}$, & $q^2 = \frac{c^2x^2}{a^2}$. Substituant ces valeurs de q & de q^2 dans la premiere équation, on a $\frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$. Effaçant $-2cx$ de part & d'autre & transposant, $\frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 + a^2 - c^2 = y^2$, & en ôtant la fraction, $c^2 \times x^2 - a^2 \times x^2 + \overline{a^2 - c^2} \times a^2 = a^2y^2$, ou $b^2 \times x^2 - b^2 \times a^2 = a^2y^2$ (à cause de $c^2 - a^2 = b^2$, & par conséquent $a^2 - c^2 = -b^2$) ; donc $b^2 \times \overline{x^2 - a^2} = a^2y^2$, d'où l'on tire $y^2 : x^2 - a^2 :: b^2 : a^2$; donc, &c.

28. COROLLAIRE I. *Il suit des deux Théorêmes précédents, que dans l'Ellipse & l'Hyperbole les quarres des ordonnées sont entr'eux comme les produits de leurs abscisses.*

29. COROLLAIRE II. 1° *De l'équation* $y^2 a^2 = b^2$

$\times \overline{a^2 - x^2}$, ou $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{a^2 - x^2}$, on tire $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$; ce qui fait voir qu'à chaque abscisse CP il répond deux ordonnées égales, l'une positive, l'autre négative. 2° De la proportion $y^2 : x^2 - a^2 :: b^2 : a^2$, on tire l'équation à l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{x^2 - a^2}$ & $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. 3°. Si dans l'équation $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, on fait $x = a$, on aura $y = 0$, mais en faisant $x > a$, la quantité $\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ deviendra imaginaire ; ainsi l'Ellipse est terminée aux extrêmités a & A du grand axe. Mais si dans l'Hyperbole on fait x ou $-x = a$, on aura $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)} = 0$, ce qui prouve que la courbe passe par les deux sommets a & A, & s'étend du côté de F aussi bien que du côté de f, de sorte que l'Hyperbole est composée de deux courbes am, An, qu'on appelle Hyperboles conjuguées, dont les ordonnées croissent, d'autant plus que les abscisses deviennent plus grandes. De plus, ces Hyperboles conjuguées sont égales ; car en prenant les abscisses positives ou négatives, pourvu qu'elles soient égales, la quantité x^2 est toujours la même (car $x^2 = +x \times +x = -x \times -x$). Si l'on suppose $x < a =$ Ca $=$ CA, y devient imaginaire. Donc la courbe n'a aucun point qui réponde aux abscisses comprises entre a & A.

30. Si dans les équations à l'Ellipse & l'Hyperbole on compte les abscisses du sommet a, le pro-

duit des abſciſſes ſera $2ax - x^2$ pour l'Ellipſe, & $2ax + a^2$ pour l'Hyperbole (23.); ainſi l'équation à l'Ellipſe $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{a^2 - x^2}$ deviendra $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{2ax - x^2}$, & l'équation à l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{x^2 - a^2}$ deviendra $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{2ax + x^2}$.

31. Puiſque le parametre p du premier axe ſe trouve (23.) en faiſant $2a : 2b :: 2b : p$, ce qui donne (* Calcul 56) $2a : p :: 4a^2 : 4b^2 :: a^2 : b^2$, il s'enſuit que $\frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$. Si dans les deux équations de l'Ellipſe & de l'Hyperbole, dont nous venons de parler, on ſubſtitue la valeur de $\frac{b^2}{a^2}$, on aura pour l'Ellipſe $y^2 = \frac{p}{2a} \times \overline{a^2 - x^2} = \frac{pa}{2} - \frac{px^2}{2a}$, & $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$. Mais on aura pour l'Hyperbole $y^2 = \frac{p}{2a} \times \overline{x^2 - a^2} = \frac{px^2}{2a} - \frac{pa}{2}$ & $y^2 = \frac{p}{2a} \times \overline{2ax + x^2} = px + \frac{px^2}{2a}$. Telles ſont les équations par rapport au parametre de l'Ellipſe & de l'Hyperbole.

32. De l'équation à l'Ellipſe, $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{a^2 - x^2}$,

* En conſidérant une proportion continue comme une progreſſion, dont les autres termes ſont inconnus, l'on a la propriété annoncée par le N° 56 de la premiere Partie.

il suit que les deux axes devenant égaux, ce qui donnera $a^2 = b^2$, ou $\frac{b^2}{a^2} = 1$, l'on aura $y^2 = 1 \times (a^2 - x^2) = a^2 - x^2 = 2ax - x^2$, équation au cercle : ainsi le cercle est une Ellipse, dont les axes sont égaux. Mais les axes de l'Hyperbole devenant égaux, on a $y^2 = x^2 - a^2$, $y^2 = 2ax + x^2$. Dans ce cas l'Hyperbole est dite équilatere.

REMARQUE. Dans l'Hyperbole, b peut être plus petit, égal ou plus grand que a; mais dans l'Ellipse, b est nécessairement plus petit que a. Car (fig. 8.) $fB = a$, étant l'hypothénuse du triangle rectangle fBC, est nécessairement plus grande que $BC = b$.

33. PROBLÊME. *Trouver l'équation de l'Ellipse & de l'Hyperbole par rapport au second axe.* A cause de mp (fig. 6 & 7.) $= CP = x$, & de $Cp = Pm = y$, il suffit de changer y en x & réciproquement, ce qui donne pour l'Ellipse $x^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{a^2 - y^2}$, ou $x^2 \times a^2 = b^2 \times a^2 - y^2 \times b^2$, transposant on a $y^2 \times b^2 = b^2 \times a^2 - x^2 \times a^2$, d'où l'on tire $y^2 : b^2 - x^2 :: a^2 : b^2$, & $y^2 = \frac{a^2}{b^2} \times \overline{b^2 - x^2}$. Donc 1°. le quarré d'une ordonnée au petit axe, est au produit de ses abscisses comme le quarré du demi-grand axe au quarré du demi-petit axe. Donc 2°. l'équation au petit axe de l'Ellipse est semblable à celle du grand axe. Si dans l'équation à l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{x^2 - a^2}$, on change y en x, & réciproquement on aura $x^2 =$

$\frac{b^2}{a^2} \times y^2 - a^2 \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} xy^2 - b^2$, & en transposant, $x^2 + b^2 = \frac{b^2}{a^2} y^2$. Multipliant par a^2 & divisant par b^2, on trouve $y^2 = \frac{a^2}{b^2} \times \overline{b^2 + x^2}$, d'où l'on tire $y^2 : b^2 + x^2 :: a^2 : b^2$. Donc 1° le quarré d'une ordonnée quelconque au second axe de l'Hyperbole est à la somme du quarré de l'abscisse & du quarré du demi-second axe, comme le quarré de la moitié du premier au quarré de la moitié du second. Donc 2° l'équation de l'Hyperbole, par rapport au second axe, n'est pas semblable à celle du premier.

COROLLAIRE. Des équations $y^2 = \frac{a^2}{b^2} \times \overline{b^2 - x^2}$, $y^2 = \frac{a^2}{b^2} \times \overline{b^2 + x^2}$, on tire $y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$, $y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + x^2}$. Ces équations font voir 1°. qu'à chaque abscisse du second axe d'une Ellipse ou d'une Hyperbole répondent deux ordonnées égales, l'une positive pm, l'autre négative po; ainsi le second axe, comme le premier, partage la courbe en deux parties égales. 2°. Que dans l'Ellipse x ne peut pas être plus grande que b; mais dans l'Hyperbole x peut croître à l'infini. Ainsi l'Hyperbole est composée de quatre branches égales, qui s'éloignent à l'infini du premier & du second axe *.

REMARQUE. Le parametre p' du second axe de

* On suppose que les axes sont prolongés.

B 3

l'Ellipse & de l'Hyperbole se trouve par la proportion $2b : 2a :: 2a : p'$, d'où l'on tire $2b : p' :: 4b^2 : 4a^2 :: b^2 : a^2$; ou $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p'}{2b}$. Si l'on substitue cette valeur de $\frac{a^2}{b^2}$ dans les équations de l'Ellipse & de l'Hyperbole, on aura $y^2 = \frac{p'b}{2} - \frac{p'x^2}{2b}$ pour l'Ellipse, & $y^2 = \frac{p'b}{2} + \frac{p'x^2}{2b}$ pour l'Hyperbole.

34. THÉORÊME. *La surface d'une Ellipse a b A m' est à celle d'un cercle décrit sur son grand axe, comme le petit demi-axe b est au demi-grand axe a* (*fig.* 6.) : car par la propriété du cercle (22.) le quarré z^2 d'une ordonnée P*n* quelconque est $= a^2 - x^2$, & par la propriété de l'Ellipse, le quarré y^2 de l'ordonnée P*m* correspondante à la même abscisse est $= \frac{b^2}{a^2} \times \overline{a^2 - x^2}$; donc $y^2 : z^2 :: \frac{b^2}{a^2} \times \overline{a^2 - x^2} : a^2 - x^2$, ou (en multipliant les deux derniers termes de la proportion par a^2 & les divisant par $a^2 - x^2$) $y^2 : z^2 :: b^2 : a^2$; ainsi $y : z :: b : a$; donc la somme de tous les y est à la somme de tous les z comme $b : a$; or la somme de tous les y est égale à la surface de l'Ellipse, & la somme de tous les z est égale à la surface du cercle; donc, &c.

COROLLAIRE I. Puisque (33.) l'équation, par rapport au petit axe de l'Ellipse, est semblable à celle du premier, il est visible que la surface d'un cercle décrit sur le petit axe de l'Ellipse, pris pour

diametre, eſt à la ſurface de l'Ellipſe comme le demi-petit axe de l'Ellipſe eſt à ſon demi-grand axe.

COROL. II. *La ſurface S d'une Ellipſe eſt égale à celle d'un cercle, dont le rayon ſeroit* $= \sqrt{ab}$; *c'eſt-à-dire, moyen proportionnel entre les deux demi-axes.* Car ſoit c la circonférence d'un cercle dont le rayon $= r$, en faiſant $r : c :: a : \frac{ca}{r}$ (car les rayons ſont proportionnels aux circonférences), on aura celle du rayon a. Multipliant cette quantité par la moitié du rayon, ou par $\frac{a}{2}$, on aura la ſurface du cercle décrit ſur le grand axe $= \frac{ca^2}{2r}$. Mais par le Théorême $S : \frac{ca^2}{2r} :: b : a$; donc $S = \frac{ca^2b}{2ra} = \frac{cab}{2r}$; or telle eſt la ſurface du cercle dont le rayon $= \sqrt{ab}$: car ſa circonférence ſe trouve en faiſant $r : c :: \sqrt{ab} : \frac{c}{r}\sqrt{ab}$. Multipliant cette circonférence par $\frac{\sqrt{ab}}{2}$, moitié de ſon rayon, l'on a ſa ſurface $= \frac{cab}{2r} = S$; donc, &c.

COROLLAIRE III. Donc pour avoir la ſurface d'une Ellipſe, dont les demi-axes ſont a & b, il ſuffit de chercher celle d'un cercle, dont le rayon ſoit moyen proportionnel entre a & b : on peut voir par-là que la quadrature de l'Ellipſe dépend de celle du cercle.

COROLLAIRE IV. *Il ſuit du ſecond Corollaire, que les ſurfaces des deux Ellipſes, dont les demi-*

grands axes sont a & A, les demi-petits axes b & B, sont entre elles comme les produits a. b, A. B de leurs demi-axes. Car la surface S de la premiere $= \frac{cab}{2r}$, & la surface $\int$ de la seconde $= \frac{cAB}{2r}$; donc $S : \int :: \frac{cab}{2r} : \frac{cAB}{2r} :: ab : AB$; donc, &c.

35. THÉORÊME. *La double ordonnée qui passeroit par le foyer f d'une Ellipse ou d'une Hyperbole, seroit égale au parametre du premier axe (fig. 6 & 7).* Car si dans l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$, on suppose $x = c$, elle deviendra $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - c^2) = \frac{b^4}{a^2}$, d'où l'on tire $y = \frac{b^2}{a}$ & $2y = \frac{2b^2}{a} = p$. Mais pour l'Hyperbole, on a $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (\overline{c^2 - a^2}) = \frac{b^4}{a^2}$ (à cause de $b^2 = c^2 - a^2$ dans l'Hyerbole); donc $y = \frac{b^2}{a}$, & $2y = \frac{2b^2}{a} = p$; puisque (par le nº. 23.) $2a : 2b :: 2b : p = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$. Nous avons aussi démontré la même chose (8) à l'égard de la parabole.

36. PROBLÊME. *Par un point donné m de l'Ellipse ou de l'Hyperbole, mener une tangente à la courbe (fig. 9 & 7.).* Dans l'Ellipse ayant fait le prolongement ml de $fm = Fm$, & mené la ligne Fl, par le milieu i de cette ligne & par le point m menez mt. Dans l'Hyperbole (fig. 7.) ayant pris sur Fm la partie $ml = fm$, & tiré la

ligne lf, tirez par le point m & par le milieu i de fl la ligne mt, & le Problême sera résolu. En effet tout autre point y de mt ne sauroit être à l'Ellipse ou à l'Hyperbole. Car $fm + Fm = fl = 2a$ dans l'Ellipse, & $Fm - fm = Fm - ml = 2a$ dans l'Hyperbole. Mais à cause de $Fm = ml$ dans l'Ellipse, de $fm = ml$ dans l'Hyperbole, & de mt perpendiculaire sur le milieu de Fl dans l'Ellipse, & sur le milieu de fl dans l'Hyperbole, tous les points de mt sont également éloignés de F & de l dans l'Ellipse, de f & de l dans l'Hyperbole; donc dans l'Ellipse $yl = yF$; donc $yf + yl = yf + yF$: or $yf + yl$ vaut plus que $fl = 2a$; donc $(yf + yF) > 2a$; donc le point y n'appartient pas à l'Ellipse. On prouvera la même chose pour tout autre point situé sur mt. Dans l'Hyperbole $Fm - fm = Fm - ml = 2a$; mais $Fy - yf = Fy - yl$ n'est pas $= 2a = Fl$, autrement l'on auroit $Fy = Fl + ly$, ce qui est absurde; donc le point y n'appartient pas à la courbe. On peut prouver la même chose pour tout autre point situé sur mt; donc la ligne mt n'a d'autre point commun avec la courbe que le seul point m; donc, &c.

COROLLAIRE I. *Dans l'Ellipse & l'Hyperbole les angles formés par la tangente, & les deux rayons vecteurs qui aboutissent au point de contact sont égaux.* Car dans l'Ellipse $Fmi = iml = fmy$ (son opposé au sommet). Dans l'Hyperbole $fmi = imF$, parce que mt divisant en deux également la base du triangle isocelle fml & passant par m, doit diviser l'angle m en deux également. De plus l'angle $Fmi = xmy$ sont opposés au sommet.

COROLLAIRE II. Donc ſi d'un des foyers de l'Ellipſe ou de l'Hyperbole partent des rayons de lumiere qui tombent ſur la ſurface intérieure d'un corps formé par la révolution d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole autour de ſon axe a A, ces rayons ſe réfléchiront vers l'autre foyer dans l'Ellipſe; mais dans l'Hyperbole leurs prologemens ſeulement aboutiront à l'autre foyer. Et réciproquement ſi dans l'Hyperbole les rayons partent du foyer le plus éloigné, ils réfléchiront ſur la convexité de l'Hyperbole, de maniere que les prolongemens mf des rayons réfléchis mM paſſeront par le premier foyer, & les rayons mM paroîtront venir de ce dernier foyer.

37. THEORÊME. *Si du centre de l'Ellipſe ou de l'Hyperbole on tire la ligne* Ci, l'on aura $Ci = a$ (fig. 9 & 7.). Dans l'Ellipſe $Cf = CF$, & $Fi = il$; donc $Ff = 2CF : CF :: Fl : Fi$; donc les triangles Ffl, FCi ſont ſemblables *; donc $fF : FC :: fl = 2a : Ci$; mais Ff eſt double de FC; donc $fl = 2a$ eſt double de Ci; donc $Ci = a$. Par un raiſonnement ſemblable on verra que les triangles flF, fiC (fig. 7.) ſont ſemblables, & que $Ci = \frac{Fl}{2} = \frac{2a}{2} = a$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Il ſuit du Théorême que ſi du point C comme centre, & de l'intervalle $CA = a$ (fig. 9 & 10.) on décrit un cercle, les perpendiculaires Fi, fd tirées des foyers F & f de l'Ellipſe, & de l'Hyperbole ſur la tangente mt, prolongée s'il le faut,

* Deux triangles ſont ſemblables, lorſqu'ils ont deux côtés adjacens à un angle égal proportionnels.

aboutiront à sa circonférence. Car les lignes Fi, fd, étant perpendiculaires sur mt, sont nécessairement paralleles, aussi-bien que fl & iCD (par la démonstration du Théorême précédent); donc 1°. F$i = li = f$D. D'ailleurs l'angle droit idD est appuyé sur le diametre iD ; donc le point d est dans la circonférence du cercle décrit du point C avec le rayon C$i = a$; donc les points d, D, i sont situés sur la circonférence de ce cercle, & Ci, CD sont des rayons; donc, &c.

COROLLAIRE II. *Dont le produit des perpendiculaires abaissees des foyers de l'Ellipse & de l'Hyperbole sur la tangente est toujours égal au quarré du second demi-axe.* Car par la propriété des cordes (Géom. 53), $fd \times f$D $= af \times f$A (fig. 9.) $= \overline{a-c} \times \overline{a+c} = aa - cc = b^2$; or fD $=$ Fi, à cause des paralleles Fl, fd; donc $fd \times$ F$i = b^2$. Dans la fig. 10, par la propriété des secantes, (Géom. 56.) $fd \times f$D $= fd \times$ F$i = fd \times li = fa \times f$A $= fa \times$ F$a = b^2$.

COROLLAIRE III. *Les perpendiculaires* Fi *abaissées du foyer* F *sur les tangentes aux différens points* m *de l'Ellipse & de l'Hyperbole croissent dans l'Ellipse plus que les racines des rayons vecteurs* Fm *& moins dans l'Hyperbole.* Dans l'Ellipse (fig. 9.) les triangles fmd, Fmi sont semblables, ayant les angles en d & i droits, & les angles dmf, imF égaux (36.); donc Fi : Fm :: $fd : fm$; donc F$i = \frac{fd.\ \text{F}m}{fm}$; donc (en multipliant tout par Fi) $\overline{\text{F}i}^2 = p^2$ (en faisant F$i = p$)

$= Fi \times fd \times \frac{Fm}{fm} = b^2 \times \frac{Fm}{fm}$; donc pour une autre tangente dont la perpendiculaire soit P, on aura $P^2 = b^2 \times \frac{Fm'}{fm'}$ (Fm', fm' désignent les rayons vecteurs correspondans à P); donc $p^2 : P^2 :: b^2 \times \frac{Fm}{fm} : b^2 \times \frac{Fm}{fm'} :: \frac{Fm}{fm} : \frac{Fm'}{fm'}$, & $p : P :: \sqrt{\left(\frac{Fm}{fm}\right)} : \sqrt{\left(\frac{Fm'}{fm'}\right)}$. La même proportion a lieu (fig. 10.) dans l'Hyperbole, ainsi qu'on peut le démontrer facilement par le moyen des triangles Fmi, fmd (la démonstration est la même *). Mais dans l'Ellipse Fm croissant, fm diminue, puisqu'on a toujours $Fm + mf = 2a$; dans l'Hyperbole au contraire Fm croissant, fm croît aussi: parce que la différence de ces lignes est toujours $= 2a$; donc dans l'Ellipse les fractions $\frac{Fm}{fm}$ croissent dans un plus grand rapport que si fm étant constante, $Fm = r$ croissoit seul; au contraire dans l'Hyperbole les fractions $\frac{Fm}{fm}$ croissent moins que si fm étoit constante; donc les perpendiculaires croissent dans l'Ellipse dans un plus grand rapport que les $\sqrt{r}$ & dans un moindre rapport dans

* Lorsqu'une même démonstration peut s'appliquer à l'Ellipse & à l'Hyperbole, on peut le faire d'abord par rapport à l'Ellipse, & la recommencer ensuite en l'appliquant à l'Hyperbole.

l'Hyperbole ; mais (14) elles croissent comme les racines des rayons vecteurs dans la parabole *.

38. PROBLÊME. *Trouver l'expression des rayons vecteurs* fm, Fm *de l'Ellipse & de l'Hyperbole* (fig. 6 & 7). Pour l'Ellipse appellant $2q$ la différence de fm à Fm, & faisant $= 2q$ la somme de fm & Fm dans l'Hyperbole, on a $q = \frac{cx}{a}$ ** (26) ; donc $fm = a - \frac{cx}{a} = \frac{a^2 - cx}{a}$, & $Fm = a + \frac{cx}{a} = \frac{a^2 + cx}{a}$. Mais dans l'Hyperbole on a $fm = q - a = \frac{cx}{a} - a = \frac{cx - a^2}{a}$; & $Fm = q + a = \frac{cx}{a} + a = \frac{cx + a^2}{a}$.

39. THÉORÊME. *Dans l'Ellipse la sous-normale* $Pq = \frac{b^2 x}{a^2} = \frac{px}{2a}$ (à cause de $\frac{bb}{a} = \frac{p}{2}$) (fig. 10. X) ; car les lignes qm, Fi étant perpendiculaires sur mt sont nécessairement paralleles ; donc (Géom. 46.) Fl $(2a)$: Ff $(2c)$ :: ml $= Fm = \frac{aa - cx}{a}$ (Problême précédent ***) : Fq $= 2c \times \frac{\frac{aa - cx}{a}}{2a} = \frac{aac - ccx}{aa}$; or $Pq = Fq$

* Cette proposition est utile dans l'Astronomie-Physique.

** Nous appellons ici $2q$ ce que nous avons appellé (26) $2d$. Voyez les numéros 26 & 27.

*** Fm désigne ici le plus petit rayon vecteur.

— FP, & FP = CF — CP = $c - x$; donc Pq = $\frac{aac - ccx}{aa} - c + x$ = (en réduisant le tout en fraction & effaçant les quantités qui se détruisent) $\frac{a^2x - c^2x}{a^2} = \frac{b^2\ x}{2\ a} = \frac{p\ x}{2\ a}$, à cause de $aa - cc = b^2$.

40. THÉORÊME. *Dans l'Ellipse la sous-tangente* Pt = $\frac{a^2 - x^2}{x}$; *mais dans l'Hyperbole* Pt = $\frac{x^2 - a^2}{x}$ (fig. 10 X, & 7.). Car dans l'une & l'autre courbe le triangle rectangle qmt donne qP : Pm :: Pm : Pt = $\frac{Pm^2}{Pq} = \frac{y^2}{Pq}$; or $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$, dans l'Ellipse; donc dans cette courbe Pt = $\frac{\frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)}{\frac{b^2 x}{a^2}} = \frac{a^2 - x^2}{x}$.

Mais dans l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$; donc dans cette courbe Pt = $\frac{\frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)}{\frac{b^2 x}{a^2}} = \frac{xx - aa}{x}$.

COROLLAIRE I. Donc CP × Pt = $a^2 - x^2$ dans l'Ellipse, mais CP × Pt = $x^2 - a^2$ dans l'Hyperbole; donc faisant Pt = S, on aura Sx = $a^2 - x^2$ dans l'Ellipse, & Sx = $x^2 - a^2$ dans l'Hyperbole.

REMARQUE. Si dans l'expreſſion de Pq & pt on compte les abſciſſes du ſommet, ou de l'origine de l'axe, alors x ſe changera en $a \mp x$, & l'on aura, toute réduction faite, $Pq = \frac{p}{2} \mp \frac{px}{2a}$, & $Pt = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$. Les ſignes ſupérieurs ont lieu dans l'Ellipſe, & les inférieurs dans l'Hyperbole. Mais dans la Parabole, ainſi que nous l'avons déja vu, la ſous-normale eſt $= \frac{p}{2}$, & la ſous-tangente $= 2x$. Donc dans les Sections Coniques la ſous-normale eſt égale à la moitié du parametre dans la Parabole, moindre dans l'Ellipſe & plus grande dans l'Hyperbole. A l'égard de la ſous-tangente, elle eſt égale au double de l'abſciſſe dans la Parabole, plus grande dans l'Ellipſe, moindre dans l'Hyperbole (on compte les abſciſſes du ſommet de la courbe). Car dans l'Ellipſe $\frac{2ax - x^2}{a - x} > \frac{2ax - 2x^2}{a - x} = 2x$. Mais dans l'Hyperbole $Pt = \frac{2ax + x^2}{a + x} < \frac{2ax + 2x^2}{a + x} = 2x$; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc $Ct = \frac{a^2}{x}$; car dans l'Ellipſe $Ct = \frac{a^2 - x^2}{x} + x = \frac{a^2 - xx + xx}{x} = \frac{a^2}{x}$. Dans l'Hyperbole $Ct = CP - Pt = x - \left(\frac{x^2 - a^2}{x}\right) = \frac{a^2}{x}$.

COROLLAIRE III. Il suit du Corollaire précédent que CP : Ca :: Ca : Ct. *Ainsi pour trouver* Ct *il faut prendre une troisieme proportionnelle à l'abcisse & au demi-axe.* Le point t étant trouvé par t & par m, on menera une ligne mt qui sera une tangente.

COROLLAIRE IV. Retranchant AP de Pt dans l'Ellipse, & aP de Pt dans l'Hyperbole & comptant les abscisses du sommet, l'on aura At (fig. 10X) & at (fig. 7.) $= \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x} - x = \frac{ax}{a \mp x}$; mais dans la Parabole (fig. 1.), A$t = x$; donc la distance du sommet à la rencontre de l'axe & de la tangente est, par rapport à l'abscisse, égale dans la Parabole, plus grande dans l'Ellipse, moindre dans l'Hyperbole.

REMARQUE. Si dans l'expression de P$t = \frac{a^2 - x^2}{x}$, on suppose $x = 0$, l'on aura P$t = \frac{a^2}{0} = \infty$ * (voyez ce que nous avons dit sur l'infini dans la premiere partie). Ainsi la tangente qui répond à l'extrémité du petit axe est infinie & parallele au grand axe de l'Ellipse; mais en faisant x négative, Pt devient négative; ce qui fait voir qu'une quantité en passant du positif au négatif, passe quelquefois par l'infini; mais d'autres fois elle passe par o, comme on le voit dans la progression arithmétique, ÷ 4. 2. 0. — 2. — 4. — 6. &c. La raison en est qu'une quantité en passant du positif au négatif, doit se trouver dans une limite,

* En considérant o comme une quantité infiniment petite.

qui

qui ne soit pas plutôt positive que négative ; or o n'est pas plutôt positif que négatif : il en est de même de l'infini. Mais une quantité $\sqrt{a-x}$ ne peut de réelle devenir imaginaire, ou d'imaginaire devenir réelle, que la quantité $a-x$ ne passe du positif au négatif dans le premier cas, du négatif au positif dans le second cas : une quantité ne peut donc passer du réel à l'imaginaire & réciproquement qu'en passant par le o, ou par ∞ ; ce qu'il est bon de remarquer.

Si dans l'expression de $at = \frac{ax}{a+x}$ dans l'Hyperbole, on suppose $x = \infty$, l'on aura $at = \frac{a.\ \infty.}{\infty} = a$. Ainsi at ne peut jamais surpasser aC, & toutes les tangentes de l'Hyperbole tombent entre C & a ; & dans ce cas $Ct = \frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{\infty} = o$.* Mais dans la parabole (fig. 4.) $at = x$ devient infinie lorsque $x = \infty$. Cela vient de ce que la parabole est moins ouverte que l'Hyperbole : en effet on a $y = \pm \sqrt{px}$ dans la parabole, & $y = \pm \left(px + \frac{px^2}{2a}\right)$ dans l'Hyperbole ; donc le parametre p & l'abscisse x étant supposés les mêmes dans l'une & l'autre courbe, les ordonnées de l'Hyperbole sont plus grandes que celles de la parabole, & en faisant $=$ Y l'ordonnée de l'Hyperbole & $=y$ celle de la parabole, l'on a (à l'infini) $y : Y :: (\sqrt{p\infty}) : \left(p\infty + \frac{p\infty^2}{2a}\right) :: \sqrt{\infty} : \left(\frac{\sqrt{\infty^2}}{\sqrt{2a}}\right) :: \sqrt{2a} \times$

* C'est-à-dire infiniment petite : on peut la regarder comme $=$ o respectivement à at.

$\sqrt{\infty} : \infty$, en divisant par $\sqrt{p}$, faisant attention que $\infty + \frac{\infty^2}{2a} = \frac{\infty^2}{2a}$, & multipliant par $2a$; donc, &c.

41. THÉORÈME. *La sous-tangente* pT *au second axe de l'Ellipse & de l'Hyperbole* (fig. 10 X & 7), *est* $= \frac{b^2 - y^2}{y}$, *dans l'Ellipse ; mais* $pT = \frac{b^2 + y^2}{y}$ *dans l'Hyperbole, en appellant* y *l'abscisse* pC *du second axe.* Les triangles semblables tmP, mTp donnent $tP : Pm = pC :: mp = PC : pT$; c'est-à-dire $\pm \frac{a^2 \mp x^2}{x} : y :: x : pT = \frac{x^2 y}{\pm a^2 \mp x^2}$; or $\pm a^2 \mp x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$, ce qu'on tire aisément de l'équation de l'Ellipse & de l'Hyperbole, $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (\pm a^2 \mp x^2)$, qui de plus donne $x^2 = \frac{a^2 b^2 \mp a^2 y^2}{b^2}$. Substituant ces valeurs dans $\frac{x^2 y}{\pm a^2 \mp x^2}$, on a $pT = \frac{b^2 \mp y^2}{y}$. Ce qui fournit un autre moyen de mener une tangente à l'Ellipse & à l'Hyperbole. Si on ajoute y à pT pour l'Ellipse, & si l'on retranche y de pT pour l'Hyperbole, on trouvera $CT = \frac{b^2}{y}$.

Des Asymptotes de l'Hyperbole, & des Diametres de l'Ellypse & de l'Hyperbole.

42. DÉFINITIONS. Si par le sommet a de l'Hyperbole (fig. 11.) on mene Yax perpendi-

culairement sur Ca, qu'on fasse $ax = a$Y $=$ Cb, les lignes indéfinies CY, Cx, menées par le centre C & les points Y & x, sont appellées *Asymptotes de l'Hyperbole*; les lignes nz', nu, ng sont nommées *Ordonnées*, lesquelles sont paralleles à une Asymptote, ou à l'un des axes. Une ligne terminée de part & d'autre à la circonférence de l'Ellipse, en passant par le centre, est appellée *Diametre de l'Ellipse*, telle est la ligne dD (fig. 12.). De même dans l'Hyperbole (fig. 11.) la ligne Dd, terminée par les Hyperboles opposées & passant par le centre, est un Diametre. Une ligne HCh qui passe par le centre parallelement à la tangente rd, menée à l'extrémité d d'un autre Diametre, est appellée *Diametre conjugué par rapport au Diametre* Dd, & réciproquement. En général deux Diametres sont dits conjugués l'un par rapport à l'autre, lorsque l'un est parallele à la tangente à l'origine de l'autre. Dans l'Ellipse tout Diametre est terminé par la rencontre du périmetre de l'Ellipse; mais dans l'Hyperbole on détermine le Diametre conjugué hH en tirant du point d parallelement aux Asymptotes, les lignes dh, dH jusqu'à la rencontre de hH. Les lignes lm, paralleles à la tangente dt (fig. 12.), ou à la tangente dr (fig. 11.), tirées d'un point l quelconque de la courbe jusqu'à la rencontre du Diametre, sont dites ordonnées à ce Diametre. Enfin le parametre p d'un Diametre est une troisieme proportionnelle à ce Diametre & à son conjugué; ainsi faisant dD $= 2a$, hH $= 2b$, on aura le parametre du premier $= \frac{2b^2}{a}$, & celui du second $= \frac{2a^2}{b}$.

43. THÉORÊME. *Le rectangle des lignes* dz, dz'

(fig. 11.) *ordonnées aux Aſymptotes parallelement au ſecond axe, eſt égal au quarré* b^2 *du ſecond demi-axe.* Les triangles ſemblables CaY, CPz donnent $a : b :: x : Pz = \frac{bx}{a}$; mais $zd = Pz - dP = \frac{bx}{a} - y$, & $dz' = Pz' + Pd = \frac{bx}{a} + y$; donc $dz \times dz' = \frac{b^2x^2}{aa} - y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; en ſubſtituant la valeur de y^2; mais $\frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^2a^2}{a^2} = b^2$; donc; &c. Il eſt viſible auſſi que $nz' . nz = bb$.

COROLLAIRE I. De l'équation $dz \times dz' = b^2$, on tire $dz : b :: b : dz'$.

COROLLAIRE II. Donc l'Hyperbole ne rencontre jamais l'Aſymptote, quoiqu'elle s'en approche continuellement; en effet $Pz = \frac{bx}{a}$, & $\overline{Pz}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$; mais $\overline{Pd}^2 = y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2a^2}{a^2}$; donc P$z$ eſt toujours plus grande que Pd, c'eſt-à-dire qu'aucun point d de l'Hyperbole ne peut jamais rencontrer le point correſpondant z de l'Aſymptote. Mais parce que de l'équation $dz \times dz' = b^2$, on tire $dz = \frac{b^2}{dz'}$, & que dz' augmente continuellement à proportion que l'Hyperbole s'éloigne du ſommet a, il s'enſuit que dz diminue & que l'Hyperbole s'approche de plus en plus de l'Aſymptote Cz.

44. THÉORÊME. *Le produit d'une ordonnée quelconque* dy *à une Aſymptote & parallele à l'autre Aſymptote, par ſon abſciſſe* Cy, *eſt toujours égal*

au produit $aK \times CK$. En effet les triangles aKY, dyz' (semblables parce que z & Y, y & K sont correspondants) donnent $dy : aK :: zd : aY = Cb :: Cb : dz'$ (Coröll. I. n° 43). Mais les triangles aKY, diz' (semblables parce que leurs côtés sont paralleles) donnent $aY : dz' :: KY : di$; donc $dy : aK :: KY : di$; & $dy.di = aK.KY$; mais à cause du parallélogramme $Cidy$, on a $dy = Ci$. De plus les triangles égaux CbK, aKY* donnent $aK = YK = CK$; donc $dy.Cy = \overline{CK}^2$.

REMARQUE. Il est visible que $bK = aK$.

COROLLAIRE I. En faisant $CK = c$, $Cy = x$, $dy = y$, l'on aura $x.y = c^2$, *équation de l'Hyperbole par rapport aux Asymptotes. La quantité* c^2 *s'appelle puissance de l'Hyperbole.*

COROLLAIRE II. Puisque par la propriété du triangle rectangle Cab, on a $(ba)^2 = b^2 + a^2$, & que $aK = \frac{CY}{2} = \frac{ba}{2}$, l'on aura $\overline{aK}^2 = c^2 = \frac{b^2 + a^2}{4} = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4}$; *donc la puissance de l'Hyperbole est égale au quart de la somme des quarrés des demi-axes.*

45. THÉORÊME. *Le rectangle* $ng \times nu$ *des ordonnées aux Asymptotes parallelement au premier axe est* $= a^2$. Car les triangles semblables ngz', CaY donnent $ng : nz' :: Ca : aY$. Pareillement les triangles semblables zun, CaY donnent $nu : nz :: Ca : aY$; donc en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions, l'on aura $ng \times nu : nz \times nz' = b^2$ (43.) $:: \overline{aC}^2 = a^2 : \overline{aY}^2 = b^2$;

* Car les triangles CbK, aYK ont deux angles égaux sur les côtés égaux aY, Cb; donc, &c.

donc $ng.nu : a^2 :: b^2 : b^2$; donc $ng.nu = a^2$.

46. THÉORÊME. *Si l'on tire une ligne quelconque* rR *d'une Asymptote à l'autre à travers une Hyperbole, les parties* rn, Ro *comprises entre chaque Asymptote & l'Hyperbole seront égales entr'elles* (fig. 13.). Car les triangles rnz, rou (semblables à cause des paralleles zn, ou) donnent $rn : nz :: ro : ou$. Mais les triangles RoV, rnz' semblables à cause des paralleles oV, nz', donnent $Rn : nz' :: Ro : oV$. Multipliant ces proportions par ordre, l'on a $rn \times nR : nz \times nz' :: ro \times oR : uo \times Vo$; mais (43.) $zn \times nz' = b^2 = uo \times oV$; donc $rn \times nR = ro \times oR$, ou $rn \times (no + Ro) = ro \times Ro = (rn + no) \times Ro$, ou $rn \times no + rn \times Ro = rn \times Ro + no \times Ro$. En effaçant de part & d'autre la quantité $rn \times Ro$, il reste $rn \times no = Ro \times no$; donc (en divisant par no) $rn = Ro$; donc, &c.

COROLLAIRE I. *Donc une tangente* mt *terminée aux Asymptotes est divisée en deux parties égales au point de contact* d. Car $dt = dm$, à cause que la ligne mt ne rencontre la courbe qu'au seul point d, & que les parties dt, dm comprises entre la courbe & les Asymptotes sont égales ainsi que nous venons de le voir.

COROLLAIRE II. Donc étant données les Asymptotes Ct, Cz & un point n dans l'angle zCt, on pourra décrire une Hyperbole qui passe par le point donné n. Car en tirant les lignes rnR, znz', &c. & prenant $oR = rn$, $dz' = zn$, &c. les points d, o, &c. appartiendront à la courbe. On pourra se servir des points d & o comme du point n, pour trouver d'autres points de la courbe, desquels on fera le même usage.

47. THÉORÊME. *Les produits des lignes* $rn \times nR$, $xp \times py$, *&c. tirées d'un point quelconque de la courbe parallelement à la tangente sont égaux entr'eux & au quarré de* $md = dt = t$. Les triangles semblables rnz, xpu donnent $zn : up :: rn : xp$; & à cause des triangles semblables $nz'R$, pVy l'on a $nz' : pV :: nR : py$. Donc en multipliant ces deux proportions, $zn \times nz' : px \times pV :: rn \times nR : xp \times py$. Mais selon ce que nous avons dit ci-dessus $zn \times nz' = b^2 = pu \times pV$; donc $rn \times nR = xp \times py$; & lorsque le point n se confond avec le point d, c'est-à-dire lorsque rR devient tangente, l'on a $xp \times py = md \times dt = t \times t = t^2$.

48. THÉORÊME. *Le Diametre* hH *conjugué au Diametre* dD, *est égal à la tangente* sdr *menée par l'origine* d *du Diametre* dD *& terminée aux Asymptotes* (fig. 11). Les triangles Hhd, Crs semblables (parce qu'ils ont tous leurs côtés paralleles) sont égaux, ayant deux angles égaux sur deux côtés égaux hd, Cr; donc $sdr = hH$. D'ailleurs $hC = dr$ à cause du parallélogramme $hdCr$; donc $sd = CH$.

On peut démontrer cela de cette autre maniere. Le parallélogramme $CHds$ donne $sd = CH$. Le parallélogramme $drCh$ donne $dr = Ch$; donc $sr = hH$.

COROLLAIRE I. Puisque $sd = dr$; donc $hC = CH$. C'est-à-dire qu'un Diametre conjugué quelconque de l'Hyperbole est divisé en deux parties égales par le centre C de l'Hyperbole. Mais d'ailleurs il est évident qu'en prenant $Ap = aP$ ou $CP = Cp$ les triangles rectangles PdC, CDp sont égaux & semblables; donc dCD est une ligne

droite, & $Cd = CD$; donc tous les Diametres de l'Hyperbole font divisés en deux également par le centre C.

49. THÉORÊME. *Dans l'Ellipse & l'Hyperbole* (fig. 14 & 15.) *tout Diametre* hH, *parallele à une tangente* mt, *coupe le plus grand rayon vecteur* Fm, *de maniere que* $mi = aC = a$. En effet menant fp parallele à mt, le triangle pmf sera isocelle, puisque les angles fmt, pmo égaux entr'eux (36.) font égaux à leurs alternes internes mfp, mpf; donc $mf = mp$. De plus les triangles Ffp, FCi semblables (à cause des paralleles fp, Ci) donnent $Ff\,(2c) : FC\,(c) :: Fp : Fi$; donc $Fp = 2Fi$, & $Fi = ip$. Mais dans l'Ellipse $Fm + fm$, ou $2pi + 2pm = 2a$; donc $pi + pm$, ou $mi = a$. Dans l'Hyperbole $Fm - fm = 2a$, ou $Fm + mp - fm - mp = Fp - 2mp = 2a = 2pi - 2mp$; donc $a = pi - mp = mi$; donc, &c.

50. THÉORÊME. *Dans une Ellipse* (fig. 16.) *le triangle* Rmt *fait par une tangente, sous-tangente & ordonnée correspondantes, est égal au trapeze* $armP$, *formé par l'abscisse* aP, *l'ordonnée* Pm, *la tangente au sommet & une droite* Cmr *qui passe par le point touchant* m *& par le centre.* Car puisque (40.) $CP : Ca :: Ca : Ct$, & que $CP : Ca :: Pm : ar$ (à cause des paralleles Pm, ar qui rendent semblables les triangles CPm, Car), l'on a $Ca : Ct :: Pm : ar$, & $Ca \times ar = Pm \times Ct$, ou $\frac{Ca \times ar}{2} = \frac{Pm \times Ct}{2}$; or ces quantités font égales aux triangles Cmt, Car; donc si de ces deux triangles égaux on retranche la partie commune PmC, l'on aura $tmP = mPar$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I. Donc un triangle qlu dont un côté ql eſt une ordonnée à l'axe, l'autre côté une ordonnée au Diametre mM & terminée à l'axe en u, & dont le troiſieme côté eſt la partie de l'axe compriſe entre ſon ordonnée & la rencontre de l'ordonnée au diametre, ſera toujours égal au trapeze correſpondant $qkra$. En effet les triangles Pmt, qlu ſemblables (à cauſe des angles droits en q & en P, & des angles correſpondants u & t égaux) donnent mPt : qlu :: $\overline{Pm}^2$: $\overline{ql}^2$ * :: $\overline{Ca}^2 - \overline{Cp}^2$: $\overline{Ca}^2 - \overline{Cq}^2$ (par la propriété de l'Ellipſe (28) :: Pmra : $qkra$ (parce que les différences des triangles ſemblables Cra, Cpm, Cra, Cqk ſont dans le rapport des différences des quarrés des côtés homologues); donc Pmt : qlu :: Pmra : $qkra$; mais mPt = Pmra; donc qlu = $arqk$ = $qkmt$, en retranchant armP & ajoutant la quantité égale tmP.

COROLLAIRE II. *Donc le triangle lok eſt égal au trapeze correſpondant $mout$.* Car nous venons de voir que qlu = $qkmt$; donc en retranchant la partie commune $qkou$, on aura lok = $mout$.

COROLLAIRE III. Il ſuit de-là que CND = Cmt *; or CND = Cnd à cauſe de la ſymmé-

(*) Car lorſque lok devient NCD, $mout$ devient évidemment mCt. Pour comprendre comment lok devient NCD, il n'y a qu'à concevoir que la ligne lu, dont un point l eſt toujours ſur la courbe & le point u ſur l'axe Aa (prolongé s'il le faut) deſcend parallelement à elle-même, juſqu'à ce qu'elle ſe confonde avec la ligne NC; alors la ligne lk, terminée par le diametre mM prolongé s'il le faut, & l'extrémité l de la ligne ul deviendra ND.

trie * de l'Ellipse qui en supposant $Cz' = CZ$, donne $Cz'N = Czn$, $Cz'D = Czd$ & $z'N = zn$; donc $Cnd = Cmt$.

51. THEORÊME. *Dans l'Ellipse le quarré d'une ordonnée lo (y) au Diametre mM (2a) est au produit des abscisses mo × oM ($a^2 - xx$) comme le quarré du demi-Diametre conjugué (b) au quarré du demi-Diametre mC (a).* Car si l'on tire nd parallele à lk, les triangles ndC, lok seront semblables, parce qu'ils ont les angles en k & d alternes internes, & de plus l'angle l du second est égal à son alterne $lQC = dnC$, son correspondant; donc $\overline{lo}^2 : \overline{nC}^2 :: lok : nCd$; or les triangles semblables Cmt, Cou donnent $\overline{Cm}^2 : \overline{Co}^2 :: Cmt : Cou$, & (*dividendo*) $\overline{Cm}^2 - \overline{Co}^2 : \overline{Cm}^2 :: Cmt - Cou = mout : Cmt :: lok : nCd$ (à cause de $lok = mout$, & de $nCd = Cmt$ (50.) $:: \overline{lo}^2 : \overline{nC}^2$; donc $\overline{Cm}^2 - \overline{Co}^2$, ou $\overline{Cm + Co} \times \overline{Cm - Co} = \overline{a+x} \times \overline{a-x}$ (en faisant $Co = x$) $= a^2 - x^2 : \overline{Cm}^2 = a^2 :: \overline{lo}^2 = y^2 : \overline{nC}^2 = b^2$, ou (mettant la premiere raison à la place de la seconde & *alternando*) $y^2 : a^2 - x^2 :: b^2 : a^2$ **.

* Cette symmétrie fait que les parties m de la courbe sont situées d'un côté de l'axe de la même maniere que les parties correspondantes & opposées M le sont de l'autre côté du même axe.

** On peut démontrer cela d'une autre maniere plus aisée. Si on conçoit qu'un cercle $AYaB$ tourne sur le Diametre Aa jusqu'à ce que son plan fasse un angle quelconque, par exemple de 30 degrés avec le plan $AQNaM$, & qu'ensuite on mene de tous les points de la circonférence du cercle des perpendiculaires FQ sur ce dernier plan, la ligne $AQaM$ par laquelle passeront toutes ces perpendiculaires sera une Ellipse (fig. 16 A). En effet il est visible qu'ayant

52. THÉORÊME. *C'est la même chose dans l'Hyperbole* (fig. 11) En effet les triangles semblables Cdr, Cmm' donnent $Cd\,(a) : dr = hC\,(b) :: Cm\,(x) : mm' = \frac{bx}{a}$, & faisant $mo = ml = y$, on a $m'o = \frac{bx}{a} - y$; & $of = fm + mo = \frac{bx}{a} + y$; donc $om' \times of = \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = b^2$ (à cause de $om' \times of = (rd)^2 = b^2$ (47), & en transposant il vient $\frac{b^2x^2}{x^2} - b^2 = y^2$, ou $\frac{b^2x^2 - b^2a^2}{a^2} = y^2$; d'où l'on tire $y^2 : x^2 - a^2 :: b^2 : a^2$.

---

mené les lignes FD, QD, l'une dans le plan du cercle, l'autre dans le plan de la figure $AQaM$, & perpendiculaires à l'intersection Aa de ces plans, l'on aura $FD : DQ :: r : \text{cos}.\, FDQ :: a : b$, en faisant le cosinus de l'angle de ces plans $= b$ & le rayon $= a$; donc toutes les ordonnées du cercle seront à toutes les ordonnées correspondantes de la figure $AQaM$ dans un rapport constant de $a : b$, ou de $CT : Ct$, en faisant $CT = a$ & $Ct = b$, ou du demi-grand-axe CA au demi petit-axe Ct, ce qui convient parfaitement à l'Ellipse (34). La figure $AQaM$ formée par les extrémités des perpendiculaires FQ, fq, &c. abaissées de la circonférence du cercle sur un plan qui lui est incliné, s'appelle *Projection orthographique* de ce cercle. C'est pourquoi la projection orthographique d'un cercle sur un plan qui lui est incliné est une ellipse.

Il est encore évident que si des extrémités & du milieu d'une corde xu, on mene des perpendiculaires xS, ZV, us sur le plan de la figure $AQSaM$, les lignes Ss, xu & SV, xZ seront entr'elles dans un rapport constant ; c'est-à-dire, que si Ss est, par exemple, la moitié de xu, SV sera aussi la moitié de xZ. De même Qq parallele à Ss, & projection du Diametre Ff sera la moitié de ce diametre.

REMARQUE. Nous avons supposé dans le dernier Théorême que $mo = ml$, ce qui est évident; car Cdm coupant sr en deux également en d doit couper sa parallele fm' en deux également en m. Mais d'ailleurs (45) $lf = om'$; donc $mo = lm$. Nous avons supposé aussi dans l'avant dernier Théo-

---

En général toutes les ordonnées, & doubles ordonnées de l'Ellipse paralleles entr'elles, seront dans un rapport constant avec les ordonnées & doubles ordonnées correspondantes dans le cercle.

Il suit de-là que Qq, MN étant deux Diametres conjugués, les quarrés $(SV)^2$ $(y)^2$ des ordonnées au second sont entr'eux comme les produits $NV \times MV$ des abscisses correspondantes. En effet toutes les ordonnées SV, QC (car cette ligne est une ordonnée qui passe par le centre), paralleles entr'elles, sont plus petites que les ordonnées xZ, FC du cercle dont elles sont les projections, & plus petites dans un rapport constant. De même les lignes NV, VC, $CN = CM$, & VM sont plus petites que les lignes YZ, CZ, CY, ZB dont elles sont les projections, & cela dans un rapport constant. Mais dans le cercle les quarrés des ordonnées xZ sont égaux aux produits $ZB \times ZY$ des abscisses; donc dans l'Ellipse les quarrés des ordonnées SV sont aux produits des abscisses $NV \times VM$ dans un rapport constant. Si, *par exemple*, dans l'Ellipse les quarrés des ordonnées elliptiques sont la moitié des quarrés des ordonnées circulaires correspondantes, & que les produits des abscisses dans l'Ellipse soient le quart de ceux du cercle, les quarrés des ordonnées de l'Ellipse seront le double des produits de leurs abscisses; en général l'on aura $(SV)^2 : NV \cdot VM :: (QC)^2 : NC \cdot CM$, ou $y^2 : aa - xx :: bb : aa$, en faisant $SV = y$, $CV = x$, $MN = 2a$, & par conséquent $MV = a + x$, $NV = a - x$, $QC = b$. Donc $y^2 = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$. Cette méthode est aussi simple qu'élégante.

trême que tous les Diametres de l'Ellipse étoient partagés en deux parties égales par le centre ; or c'est ce qui est évident, car en tirant (fig. 16.) l'ordonnée MF & supposant CF = CP, l'on aura par la propriété de l'Ellipse $Pm = FM$, & les triangles rectangles CFM, CPm auront deux côtés égaux, par conséquent leurs hypothénuses seront égales ; donc ces triangles auront tous leurs côtés égaux aussi-bien que leurs angles ; donc mCM sera une ligne droite, & le Diametre mM sera divisé en deux parties égales en C.

COROLLAIRE I. Il suit de ces Théorêmes que $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$ dans l'Ellipse, & $y = \pm \frac{b}{a} \times \sqrt{(x^2 - a^2)}$ dans l'Hyperbole ; donc à chaque ordonnée positive il répond une ordonnée négative égale ; donc dans l'Ellipse $lo = io$, & dans l'Hyperbole (fig. 11.) $lm = mo$. Ce que nous savions déja pour l'Hyperbole.

COROLLAIRE II. Puisque l'équation aux Diametres est la même que l'équation aux axes, il est aisé de voir que l'équation par rapport aux Parametres & aux Diametres conjugués sont les mêmes que pour les axes, & que les propriétés des Diametres sont les mêmes que les propriétés des axes en tout ce qui ne regarde pas les foyers.

COROLLAIRE III. Si l'on suppose l'abscisse $x = 0$, on aura pour l'Ellipse $y = \pm b$; mais en supposant $x = a$ dans l'Hyperbole, on a $y = 0$; donc l'Hyperbole passe par les extrémités d, D du Diametre dD.

53. THÉORÊME. *Si des extrémités n, M (fig. 16.) des deux Diametres conjugués on mene les ordonnées mP, nz au grand axe d'une Ellipse, le quarré*

d'une des abscisses Cz *comprise entre le centre* C *& une des ordonnées, est égal au produit des abscisses* AP $\times$ Pa *de l'autre ordonnée.* Car supposant $nz = z$, les triangles Pmt, nzC semblables à cause des angles alternes internes nCP, mtC & des angles droits z & P, donnent $\overline{tP}^2 : \overline{Cz}^2 :: \overline{Pm}^2 : \overline{zn}^2$, ou en faisant $tP = S$, $Cz = u$, $S^2 : u^2 :: y^2 : z^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - u^2$; donc $S^2 : u^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - u^2$; donc (en mettant Sx à la place de $a^2 - x^2$ (40.) & *alternando*) $S^2 : Sx :: u^2 : a^2 - u^2$. Ou en divisant les deux termes de la premiere raison par S & les multipliant par x, $Sx : x^2 :: u^2 : a^2 - u^2$, & en composant, $Sx : x^2 + Sx :: u^2 : a^2$, ou alternant, $Sx : u^2 :: x^2 + Sx : a^2$; mais $a^2 = x^2 + Sx$ (ce qui se déduit facilement de l'équation (40.) $Sx = a^2 - x^2$); donc $u^2 = Sx = aa - x^2$, & $x^2 = a^2 - u^2$.

COROLLAIRE I. Parce que de l'équation à l'Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ on peut tirer $\frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2 - x^2$, en multipliant par a^2 & divisant par b^2, il est évident que pour l'ordonnée nz (z) on aura $\frac{z^2 \times a^2}{b^2} = a^2 - u^2 = x^2$, d'où l'on tire $b^2 x^2 = z^2 a^2$, ou $bx = za$.

COROLLAIRE II. Ayant tiré CY perpendiculairement sur mt, les triangles Czn, mCY, semblables parce qu'ils ont un angle droit chacun, & les angles en C & t égaux, puisqu'ils sont alternes internes, donnent $nC : nz :: Ct \left(\frac{a^2}{x}\right)$ (40.) : CY; donc $Cn \times CY = \frac{z \cdot a^2}{x}$; mais $az = bx$; donc $Cn \times CY = ab$; or en tirant ns parallele

à Cm, on aura le parallélogramme mCns fait sur les demi-Diametres conjugués $=$ Cn $\times$ CY * $= ab$; *donc le parallélogramme fait sur les demi-Diametres conjugués de l'Ellipse est égal au rectangle des demi-axes ; & par conséquent le parallélogramme des deux diametres conjugués quelconques sera toujours égal au rectangle des axes.*

COROLLAIRE III. Si le point z tombe sur le point P, les ordonnées y & z seront égales, & les demi-Diametres conjugués Cm, Cn étant les hypothénuses des triangles rectangles égaux CPm, Cnz, seront égaux, & l'on aura CP $=$ Cz, ou $x = u$, & $x^2 = u^2$. Substituant cette valeur de u^2 dans l'équation $u^2 = a^2 - x^2$ (Théorême précédent), l'on a $x^2 = a^2 - x^2$, ou $x^2 + x^2 = a^2$, ou $2x^2 = a^2$; d'où l'on tire $x^2 = a \times \frac{a}{2}$ & $a : x :: x : \frac{a}{2}$. Ainsi prenant CP moyenne proportionnelle entre la moitié & le quart de l'axe, & faisant passer une double ordonnée par le point P, cette ligne déterminera les deux points par lesquels & le centre C on menera deux Diametres conjugués égaux. De plus parce qu'il n'y a de chaque côté du centre C qu'un seul point qui donne $a : x :: x : \frac{a}{2}$, & que chacun de ces points donne les mêmes Diametres, il est évident qu'il n'y a dans l'Ellipse que deux diametres conjugués égaux.

Au reste si sur le grand axe de l'Ellipse on fait au centre C un angle mCP de 45°, & qu'on tire l'ordonnée mP à l'axe, on aura un des

* Car la surface d'un parallélogramme est égale au produit de sa base Cn par sa hauteur CY.

Diametres conjugués égaux de l'Ellipse. En effet supposant l'angle mCP de 45°, le triangle CPm sera isocelle à cause de l'angle $mCP = 45^\circ$; donc $\overline{Cm}^2 = \overline{CM}^2 = a^2 = \overline{CP}^2 + \overline{Pm}^2 = x^2 + x^2$ (à cause de $Pm = CP = x$); donc $a^2 = 2x^2$; donc $x^2 = \frac{a^2}{2}$; donc $a : x :: x : \frac{a}{2}$; donc, &c. On trouvera l'autre Diametre en faisant l'angle $nCP = 45^\circ$.

COROLLAIRE IV. Il suit de-là que l'équation aux Diametres conjugués de l'Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, en faisant $Cm = a$, $Cn = b$, se réduit à $y^2 = a^2 - x^2$, dans la supposition des deux Diametres conjugués égaux; or cette équation est la même que celle du cercle; donc l'on ne peut être sûr que cette équation appartienne au cercle, à moins qu'on ne sache si les ordonnées sont perpendiculaires au Diametre. Dans le cas contraire l'équation est à l'Ellipse par rapport à ses Diametres conjugués égaux.

54. THÉORÊME. *Dans l'Hyperbole* (fig. 11.) *le parallélogramme des Diametres conjugués est égal au rectangle des axes.* Car (44.) $CK = aK = c$, & $Cy \cdot dy = x \cdot y = c^2$ (44.) $= CK \times aK$, ce qui donne $CK : Cy :: yd : aK$; donc les triangles CaK, Cyd ont les côtés qui comprennent les angles K & y (égaux à cause des paralleles aK, dy *) réciproques; or si par d & a, on conçoit tirées les perpendiculaires dt', at sur les bases

* Car à cause du parallélogramme $Cbax$, l'on a Ka parallele à Cx; or dy est aussi parallele à l'Asymptote Cx; donc, &c.

de

de ces triangles, les triangles $t'yd$, taK auront un angle droit en t' & t, & de plus les angles en y & K égaux, ce qui les rend semblables; donc $yd : aK :: dt' : at$; donc CK : Cy :: dt' : at; & CK × at = Cy × dt'; or CK × at est égal au triangle CaY double de aCK (à cause du sommet commun a & de CY = 2CK (48). De même Cy × dt' est double du triangle Cyd = dCi; donc il est égal au triangle Cdr, double de Cdi, à cause de Ci = ir (car les triangles rCs, rdi donnent rC : ri :: rs : rd; mais $rd = \frac{rs}{2}$; donc ri = Ci = dy); donc le rectangle CbYa des demi-axes, double du triangle CaY, est égal au parallélogramme Chdr fait sous les demi-Diametres conjugués Ch, Cd; donc le rectangle des axes est égal au parallélogramme des Diametres conjugués, ce qu'il falloit démontrer.

55. DÉFINITIONS. Si par un point r d'une courbe quelconque on fait passer un cercle $mlrp$ dont le centre n soit situé sur la ligne rn * perpendiculaire à la courbe (fig. 18.), qui ait en ce point la même tangente que la courbe & tel qu'un cercle décrit avec un plus grand rayon passe au-dessus, tandis que le cercle décrit d'un plus petit rayon passe au-dessous d'un petit arc de la même courbe pris de part & d'autre du point r, ce cercle s'appelle *cercle osculateur*, son rayon est dit rayon de courbure (parce que ce cercle a la même courbure que le petit arc de la courbe dont nous venons de parler), rayon du cercle osculateur, rayon de la développée.

56. LEMME. *Le sinus verse* $pa = x$ *d'un arc éva-*

* On n'a pas décrit le cercle entier, pour ne pas embrouiller la figure.

nouissant (ou infiniment petit) ma, est égal au quarré de l'ordonnée divisé par le Diametre (fig. 17.); car $\overline{Pm}^2 = y^2 = pa \times pA = x \times (2m - x)$, en faisant le Diametre du cercle $= 2m$; donc $x = \frac{y^2}{2m - x} = \frac{y^2}{2m}$. Parce que x étant une quantité infiniment petite, on peut, supposer $2m - x$, ou $Ap = Aa$.

57. THÉORÊME. *Dans l'Ellipse & l'Hyperbole* (fig. 18 & 19.) *faisant le Diametre $rg = 2g$, son conjugué $hH = 2h$, le rayon vecteur $fr = r$, le rayon de courbure rn au point $r = m$, la perpendiculaire rq au diametre $hH = q$, la perpendiculaire ft abaissée du foyer f sur la tangente $= t$, l'ordonnée lz, lx, $lu = y$* *. *La ligne rz (sinus verse de l'arc lr) $= y$. Je dis que le rayon de courbure m est $= \frac{h.h}{q}$.* Les triangles rxz, rCq semblables, parce que hH est parallele à lz (42.) ordonnée au diametre rg, donnent rx (x) : rz $\left(\frac{y^2}{2m}\right)$, Lemme précédent, :: rC (g) : rq (q), d'où l'on tire $x.q = \frac{g.y^2}{2m}$, multipliant par m & divisant par $x.q$ il vient $m = \frac{gy^2}{2q.x}$; or $y^2 : 2g.x \mp x^2$ (en comptant les abscisses depuis l'origine du Diametre, & prenant le signe $-$ pour l'Ellipse & le signe $+$ pour l'Hyperbole) :: $h^2 : g^2$, ou en négligeant x^2 **, $y^2 : 2g.x :: h^2 : g^2$, d'où

* Ces lignes ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles ; ainsi on peut les supposer égales.

** Parce que x^2 est un infiniment petit du second ordre, qu'on néglige devant $2gx$ infiniment petit du premier ordre.

l'on tire $y^2 = \frac{2g\,x\,h^2}{g^2}$. Substituant cette valeur de y^2 dans la valeur de m & réduisant il vient $m = \frac{h.h}{q}$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Puisque $h.q$, c'est-à-dire le parallélogramme des demi-Diametres conjugués est $= a.b$ dans l'Ellipse & l'Hyperbole, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, l'on a $h = \frac{a.b}{q}$, $h^2 = \frac{a^2.b^2}{q^2}$. Substituant cette valeur dans $m = \frac{h.h}{q}$, l'on aura $m = \frac{a^2.b^2}{q^3}$.

COROLLAIRE II. Les triangles rft, rdq semblables, à cause des angles droits t & q, & des angles alternes internes en d & r dans l'Ellipse, tandis que dans l'Hyperbole $qdr = drt$ (son alterne interne) $= trf$ (36.)), donnent rq (q) : $rd = a$ (49.) :: ft (t) : rf (r), ou $q : a :: t : r$; donc $q = \frac{at}{r}$, & $q^3 = \frac{a^3 t^3}{r^3}$; donc en divisant $a^2 b^2$ par cette valeur de q^3, l'on aura $m = \frac{a^2.b^2}{q^3} = \frac{b^2.r^3}{a.t^3} = \frac{p}{2} \times \frac{r^3}{t^3}$, parce que $\frac{b^2}{a}$ est la moitié du parametre, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus.

COROLLAIRE III. Puisque $h.q = a.b$, l'on a $q = \frac{a.b}{h}$; & divisant $h.h$ par $\frac{a.b}{h}$, il vient $m = \frac{h^2}{q} = \frac{h^3}{a.b}$.

COROLLAIRE IV. Si du centre C d'une Ellipse ou d'une Hyperbole (fig. 21 & 22.) on abaisse sur la tangente rt la perpendiculaire Cn, & du point r la normale rE, les triangles CnT, ErP rectangles l'un en P l'autre en n, ayant de plus les

angles en E & T égaux (parce qu'ils sont complémens de l'angle t dans l'Ellipse, & complémens l'un de l'angle Ctn, l'autre de l'angle rtE dans l'Hyperbole; lesquels angles sont égaux étant opposés au sommet), sont semblables; donc Cn = rq (à cause des paralleles entre paralleles) : CT :: rP = Cp : rE; donc $rq \times r$E = C$p \times$ CT; mais Cp $\times$ CT = b^2; puisque * Cp : Cb :: Cb : CT; donc rE = $\frac{b^2}{q}$, & $q = \frac{b^2}{r\text{E}} = \frac{b^2}{\text{M}}$, en faisant la normale rE = M; & enfin $q^3 = \frac{b^6}{\text{M}^3}$.

COROLLAIRE V. Substituant cette valeur de q^3 dans la formule $m = \frac{a^2 . b^2}{q^3}$, l'on a $m = \frac{\text{M}^3 . a^2}{b^4}$.

COROLLAIRE VI. Il suit du Théorême & des Colloraires précédents que $m = \frac{h^2}{q} = \frac{a^2 b^2}{q^3} = \frac{p}{2} \times \frac{r^3}{t^3} = \frac{h^3}{ab} = \frac{\text{M}^3 a^2}{b^4}$; donc pour un autre rayon de courbure N par rapport à un autre point, l'on aura $\text{N} = \frac{\text{H}^2}{\text{Q}} = \frac{a^2 b^2}{\text{Q}^3} = \frac{p}{2} \times \frac{\text{R}^3}{\text{T}^3} = \frac{\text{H}^3}{ab} = \frac{\text{M}'^3 a^2}{b^4}$; donc $m : \text{N} :: \frac{h^2}{q} : \frac{\text{H}^2}{\text{Q}} :: \frac{a^2 b^2}{q^3} : \frac{a^2 b^2}{\text{Q}^3} :: \frac{p}{2} \times \frac{r^3}{t^3} : \frac{p}{2} \times \frac{\text{R}^3}{\text{T}^3} :: \frac{h^3}{ab} : \frac{\text{H}^3}{ab} :: \frac{\text{M}^3 a^3}{b^4} : \frac{\text{M}'^3 a^2}{b^4}$; & en divisant les valeurs correspondantes de m & N par leur multiplicateur commun entier ou fractionnaire, on verra que

* Car l'expression $\frac{b^2}{y}$ (41.) donne $y : b :: b :$ CT, ou Cp : Cb :: Cb : CT.

les rayons de courbure ſont entr'eux comme les quarrés des demi-axes conjugués correſpondants, diviſés par les perpendiculaires abaiſſés ſur ces demi-axes, comme $\frac{1}{q^3}$, $\frac{1}{Q^3}$, c'eſt-à-dire, en raiſon inverſe, du cube de ces perpendiculaires, comme les cubes des rayons vecteurs diviſés par les cubes des perpendiculaires abaiſſées du foyer, d'où part le rayon vecteur ſur la tangente, & comme les cubes des normales tirées du point de contact juſqu'à la rencontre de l'axe.

58. THÉORÊME. *Dans la parabole* (fig. 20.) *on aura* $m = \frac{2.r^2}{t} = \frac{2ar^3}{t^3}$ (*a eſt le quart du parametre*). En effet le triangle urx eſt iſocelle à cauſe des angles en x & u égaux à leurs alternes mrx, fro; or ces derniers angles ſont égaux entr'eux (10.); donc le triangle urx eſt iſocelle & donne $rx = ru$. Maintenant les triangles rft, rzu étant rectangles en t & z, & ayant les angles en u & r alternes internes ſont ſemblables & donnent $ru = rx\ (x) : zr\ \left(\frac{y^2}{2m}\right) :: fr\ (r) : ft\ (t)$, d'où l'on tire $x.t = \frac{ry^2}{2m}$, ou en multipliant par m & diviſant par $x.t$, $m = \frac{y^2.r}{2x.t}$; or (par le nº 17.) $y^2 = x.P$, & $P = 4r$, ou 4 fois la diſtance de l'origine du Diametre à la directrice (1.); donc $m = \frac{4r^2.x}{2x.t} = \frac{2.r^2}{t}$. Mais (par le nº 14.) $\overline{ft}^2 = t^2 = fa \times fT = fa \times fr$ (par le nº 10.), ou $t^2 = a.r$; donc en multipliant par $a.r$ & diviſant

par t^2, l'on aura $m = \frac{2.r^2}{t} = \frac{2.r^2 \times a.r}{t \times t^2} = \frac{2a.r^3}{t^3}$.

COROLLAIRE I. Donc les rayons de courbure dans la parabole sont entr'eux comme les quarrés des rayons vecteurs divisés par les perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes aux points où aboutissent ces rayons, & comme les cubes de ces mêmes rayons divisés par les cubes des perpendiculaires corrrespondantes.

Après avoir parlé des propriétés des Sections Coniques, par rapport à leurs axes & leurs diametres, il nous reste à parler de leur surface, & de leur description. Quant à la surface de la parabole, nous l'avons déja trouvée (21.). Nous avons vu aussi (34.) que celle de l'Ellipse dépend de la quadrature du cercle; mais l'on n'a pu jusqu'ici trouver que par approximation celle de l'Hyperbole, en se servant même du calcul intégral. Nous en parlerons dans la seconde Partie de cet Ouvrage. Passons donc à la description des Sections Coniques, & comme nous savons déja décrire la parabole (18.), nous allons donner la méthode de décrire l'Ellipse & l'Hyperbole.

59. PROBLÊME. *Décrire une Ellipse* (fig. 24.). Attachez en f & F les extrémités d'un fil fmF $=$ A$a > f$F, & faisant tourner le stile m en tenant toujours le fil tendu, on décrira une Ellipse. En effet la somme des lignes menées du point m à chaque foyer sera par-tout égale à la longueur du fil ou au grand axe Aa; donc (23.) la courbe décrite est une Ellipse. Si la distance des foyers fF devient o, c'est-à-dire si f tombe sur F, la courbe sera un cercle. Pour l'Hyperbole (fig. 23.), attachez le bout F, d'une regle mF mobile en F, en-

ſorte qu'elle puiſſe tourner autour de F, & en f le bout d'un fil fm D, dont l'autre bout ſoit attaché à celui de la regle Fm. Si la différence des longueurs de la regle & du fil eſt égale à l'axe Aa, il eſt évident que le ſtile m qui tient le fil tendu, & ſa partie mD collée contre la regle, décrira par ſon mouvement l'Hyperbole am; puiſqu'on aura toujours $Fm - mf = Aa$ propriété (23.) de l'Hyperbole.

On peut auſſi décrire l'Ellipſe & l'Hyperbole de cette autre maniere. Ayant pris (fig. 24 & 25.) Fd égal au premier axe & du foyer F comme centre, avec les rayons Fn, Fn, &c. pris à diſcrétion, décrit des arcs mnm, & du point f avec un rayon fm égal à la ligne correſpondante dn, décrivant des arcs qui coupent les premiers en m, m, les points m, m seront dans la courbe. Car $Fm = Fd \mp dn$, * par conſtruction, ou $Fm \pm dn = Fm \pm fm = Fd$; or F$d$ eſt égal au premier axe; donc, &c.

REMARQUE. Dans l'Ellipſe le rayon Fn ne peut être plus grand que Fa, & dans l'Hyperbole l'on ne peut faire $Fn < Fa$, autrement les arcs décrits des points F, f ne ſe rencontreroient pas; mais dans la ſuppoſition de $Fn = Fa$, ces arcs ſe toucheront en a.

60. PROBLÊME GÉNÉRAL. *Décrire les Sections Coniques, Parabole, Hyperbole & Ellipſe par une même méthode* (fig. 26, 27 & 28.). Sur une ligne indéfinie as élevez la perpendiculaire sb, par le point a & le point b tirez la ligne abd, faites

* Le ſigne ſupérieur eſt pour l'Ellipſe, & l'inférieur pour l'Hyperbole.

$sf = sb$, & ayant mené tant de droites pd, pd que l'on voudra perpendiculairement à l'axe sp; du point f, comme centre, avec un rayon égal à pd, décrivez un petit arc qui coupe cette pd en m, le point m sera à une section conique. En effet si par le point a on mene ag perpendiculaire à as (que nous appellerons *la Directrice*), à cause du triangle asb isocelle dans la figure 26, l'on aura chaque pd égale à sa correspondante $fm = pa = mg$; donc dans ce cas la courbe est une parabole (1.). Si as est plus grande que sb, l'on aura l'Ellipse. Car si par le point f l'on tire la ligne fh, faisant un angle de 45° avec sS, & que du point h où cette ligne rencontre la ligne ab, on tire la ligne hSB (fig. 27.), le point S appartiendra à la courbe. En effet $fS = Sh$ à cause du triangle isocelle hSf. De plus il est visible qu'en prenant $SA = sa$, & $SB = sb$, & tirant la ligne ABD, les pD croissent autant en s'éloignant de S, que les pd en s'éloignant de s; de maniere que deux pD, pd, dont l'une est autant éloignée de S, que l'autre l'est de s sont égales, & leur somme est une quantité constante; or $hS + BS = fS + sb = fS + fs = sS$; donc $fm + Fm$ (en supposant $FS = fs$), $= pnd + pMD = sS$ *, c'est-à-dire la somme des distances d'un point m aux foyers de la courbe est égale au premier axe sS; donc (23.) la courbe décrite est une Ellipse. Si as est plus petite que sb (fig. 28.), en tirant fh de maniere que l'angle sfh soit de 45°, on verra aisément que $hS = fS$, & que le point S appar-

* Ce qui est visible en prenant $SA = sa$ & xA pour directrice.

tient à la courbe décrite. Faisant $FS = fs$, $AS = as$, $SB = sb$, & tirant la ligne indéfinie AB, on prouvera facilement que chaque Fn étant prise égale à pD, tandis que chaque fn correspondante est égale à chaque pd correspondante, on a toujours $pd - pD = Dd = fn - Fn$; or lorsque le point n tombe en S, l'on a $fn - FS = FS - fs = Ss$; c'est-à-dire que la courbe Sn est telle que la différence des distances de chacun de ses points aux foyers fF est égale à l'axe sS; donc cette courbe est une Hyperbole; or la courbe sm est évidemment égale à la courbe Sn; donc ces deux courbes sont deux Hyperboles conjuguées, c'est-à-dire que la courbe décrite est composée de quatre branches qui sont censées ne faire qu'une seule & même courbe.

REMARQUE I. A cause de l'angle $hfS = 45° = bap$, l'on a hf parallele à ab (fig. 26.); donc ces deux lignes ne se rencontreront jamais; ainsi le point h & le point S correspondants disparoissent; donc le point S n'existe point; c'est-à-dire que l'axe de la parabole n'est point fini; donc cet axe est infini.

REMARQUE II. Si sa étoit infiniment plus grande que $sb = sf$, les fm seroient censées égales par rapport à sa, ainsi tous les rayons vecteurs seroient égaux, & la courbe seroit un cercle. En effet c'est le rapport de sb à sa, ou (à cause des triangles semblables asb, apd) de pd à pa ou mg qui détermine la nature de la courbe, de maniere que les fm sont dans le rapport des mg; or les mg sont censées égales dans le cas de $sa = \infty$; donc alors les pd ou fm sont égales, ce qui arrive dans le cercle où les rayons sont égaux.

COROLLAIRE I. Donc une courbe dans laquelle les distances de chacun de ses points m au foyer f & à la directrice ag sont en raison constante, est une Section Conique; & cette Section conique est Parabole, Ellipse, Hyperbole ou Cercle selon que mg est par rapport à mf, égale, plus grande, plus petite ou infinie.

COROLLAIRE II. Etant donnée la directrice, un point m avec le foyer f (fig. 28.), il sera aisé de décrire la courbe; car tirant les perpendiculaires mg, mg & les rayons vecteurs fm, fm, & divisant af en deux parties telles qu'on ait $mg : fm :: sa : sf = sb$, c'est-à-dire divisant fa en parties proportionnelles aux lignes mg, fm, & prenant sf pour le quatrieme terme de la proportion, on aura le sommet s de la courbe. Si l'on mene sb perpendiculaire sur as, & égale sf & qu'on tire l'indéfinie ab, on pourra ensuite décrire la courbe comme nous venons de le dire dans le Problême précédent; de maniere que toute la difficulté consiste à trouver le point s. Soit le rapport de fm à sa correspondante mg égal à celui de $a : b$, la ligne connue $af = c$, la partie $sf = x$; donc $sa = c - x$. Mais parce que $fm : mg :: a : b :: fs = sb : sa$, l'on a la proportion $a : b :: x : c - x$, ou (*componendo*) $a + b : a :: x + c - x = c : x$. Prenant donc une quatrieme proportionnelle aux lignes connues $a + b$, a, c l'on aura $x = fs$, & par conséquent as & le point s cherché.

61. PROBLÊME. *Etant donné le foyer f & trois points m, m', m'' d'une Section Conique, décrire la courbe* (fig. 29.). Ayant tiré les cordes mm', $m'm''$; cherchons deux points de la directrice agx.

Pour cela ſoit $mg = x$, $mm' = d$, faiſons $fm : fm' :: a : b :: mg : m'g :: x : d + x$; donc (*dividendo*) $b - a : a :: d + x - x = d : x$. Prenant donc mg quatrieme proportionnelle aux lignes $b - a$, a, d on aura un des points de la directrice. Maintenant ſuppoſant $m'x = y$ & $m'm'' = g$, en faiſant $fm' : fm'' :: b : c :: y : m''x = y + g$, l'on aura (*ſubtrahendo*) $c - b : b :: y + g - y = g : y$. Prenant donc ſur $m''m'$ prolongée $m'x$ quatrieme proportionnelle à $c - b$, b & g, l'on aura un autre point x de la directrice. Tirant par les points g & x l'indéfinie ax, l'on aura la directrice. Du foyer f on abaiſſera la perpendiculaire fa ſur la directrice. Cela poſé on connoîtra le foyer, la directrice & un point m de la courbe, puiſqu'on en a trois par la ſuppoſition; donc par le Corollaire II du Problême précédent il ſera aiſé de décrire la courbe, qui ſera une Section Conique. En effet ayant mené les lignes mp, $m'p'$; $m''p''$ perpendiculaires ſur ag, à cauſe des triangles rectangles ſemblables gmp, $gm'p'$, l'on a $gm : gm'$, ou $fm : fm' :: pm : pm'$. On prouvera de même par les triangles $xm'p'$, $xm''p''$ que $fm' : fm'' :: p'm' : p''m''$, c'eſt-à-dire que les diſtances de chacun des points de la courbe au foyer & à la directrice eſt toujours dans un rapport conſtant; donc (Corollaire I du Problême précédent) la courbe eſt une ſection Conique *.

62. Nous allons faire voir maintenant que les courbes que nous avons appellées Parabole, Ellipſe & Hyperbole naiſſent de la ſection d'un cône Bae par un plan iEm (fig. 30, 31 & 32.). Pour le dé-

* Ce Problême eſt utile dans l'Aſtronomie pour déterminer les orbites des Cometes.

montrer supposons un autre plan $Kilm$ parallele au cercle Bc de la base du cône, rencontrant la premiere section en ihm. Concevons un troisieme plan Bac qui coupe les deux premiers en Kl, & hE. Maintenant prolongeant Eh jusqu'à la rencontre d de aB prolongée s'il le faut, & ayant mené Ef & dg paralleles à Kl, & dans le plan du triangle Bac, faisons $Ef = c$, $dg = b$, $Ed = 2a$, $Eh = x$ & $hi = y$, à cause des triangles semblables Ehl, Edg, l'on a $Ed\ (2a) : dg\ (b) :: Eh\ (x) : hl = \frac{bx}{2a}$. De même à cause des triangles semblables dEf, dhK on a $dE\ (2a) : fE\ (c) :: dh\ (2a - x)$ (fig. 30.), ou $(2a + x)$ (fig. 31.) : $hk = \frac{2ac \mp cx}{2a}$. Enfin la section $Kilm$ parallele à la base du cône, étant évidemment un cercle, on aura (propriété du cercle) $hK \times hl = \overline{hi}^2$ * $= y^2$ (22.); donc $\frac{bx}{2a} \times \frac{2ac \mp cx}{2a} = \frac{bcx}{2a} \mp \frac{bcx^2}{4a^2} = y^2$; mais si Ed est parallele à fK (fig. 32.) on aura $hK = fE = c$, & alors $hk \times hl = \overline{ih}^2$ devient $\frac{bcx}{2a} = px = y^2$, en faisant $\frac{bc}{2a} = p$, équation à la parabole (3.). Dans cette même supposition de $\frac{bc}{2a} = p$, l'équation $\frac{bcx}{2a} \mp \frac{bcx^2}{4a^2} = y^2$, devient $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$.

* ih commune section des plans Kml, amE perpendiculaires au plan Bac, est perpendiculaire au plan Bac, aussi-bien qu'à Kl.

Cette équation eſt à l'Ellipſe ſi l'on prend le ſigne $-$, & à l'Hyperbole en prenant le ſigne $+$; donc, &c. *

REMARQUE I. En ſuppoſant $p = \frac{2b^2}{a}$ ** & ſubſtituant cette valeur dans l'équation $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$, il viendra $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax \mp xx)$, équation à l'Ellipſe en prenant le ſigne $-$, & à l'Hyperbole en prenant le ſigne $+$. On voit donc pourquoi les courbes, dont nous venons de parler, ſont appellées Sections Coniques; mais parce que ſi le plan coupant paſſe par le ſommet a du cône, la ſection eſt évidemment un triangle & un cercle lorſque le plan coupant eſt parallele à la baſe du cône : il s'enſuit qu'il n'y a en tout que cinq Sections Coniques, deſquelles nous avons déja parlé ſous le nom de Triangle, Cercle, Ellipſe, Hyperbole & Parabole.

REMARQUE II. La ligne Ed devient évidemment d'autant plus grande qu'elle approche plus d'être parallele au côté Ba du cône, & elle eſt cenſée infiniment grande lorſqu'elle eſt enfin devenue parallele à Ba, & le point d eſt alors cenſé à une diſtance infinie de l'origne E de la courbe (fig. 32.). On peut donc conſidérer la Parabole

* Sous le nom d'Ellipſe nous comprenons le cercle, qui n'eſt qu'une Ellipſe, dont les foyers ſe réuniſſent au centre. Et ſi dans l'équation $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$, on ſuppoſe $p = 2a$, l'on aura $y^2 = 2ax - x^2$ équation au cercle, nous ſuppoſons les ordonnées perpendiculaires aux abſciſſes.

** b peut ici avoir une valeur différente de celle qu'il a dans $\frac{bc}{2a} = p$.

comme une Ellipse, dont l'axe est infiniment grand. En effet si dans l'équation $y^2 = px \mp \frac{x^2}{2a}$, qui est l'équation généralissime par rapport au parametre, on fait $2a = \infty$, la quantité $\frac{px^2}{2a}$ devient infiniment petite, & l'on a dans ce cas l'équation $y^2 = px$. Si l'on fait $p = 2a$, ce qui arrive dans le Cercle, dans l'Ellipse par rapport aux Diametres conjugués égaux, & dans l'Hyperbole équilatere, l'on aura $y^2 = 2ax \mp x^2$, équation au Cercle, ou aux Diametres conjugués égaux de l'Ellipse, en prenant le signe $-$, & à l'Hyperbole équilatere en prenant le signe $+$. Si l'on compte les abscisses du centre, cette équation devient $y^2 = \pm a^2 \mp x^2$. Si l'on fait $2a : 2b :: 2b : p$, l'on aura $2a : p :: 4a^2 : 4b^2 :: a^2 : b^2$ & $\frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$; & enfin $p = \frac{2b^2}{a}$. Substituant cette valeur dans l'équation généralissime au parametre, on trouve $y^2 = \frac{2b^2}{a}x \mp \frac{b^2}{aa}x^2$, ou $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax \mp x^2)$, & en supposant $b = a$, l'on a $y^2 = 2ax \mp x^2$, équation au Cercle & à l'Hyperbole équilatere; & en supposant les ordonnées obliques, cette équation appartient aux Diametres conjugués égaux de l'Ellipse en prenant le signe $-$. On voit par-là que l'équation $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$ peut représenter les équations de toutes les Sections Coniques, en y comprenant même le cercle. Il est évident encore que le quarré d'une ordonnée est, par rapport au

produit de l'abſciſſe & du parametre, égal dans la Parabole, moindre dans l'Ellipſe & plus grand dans l'Hyperbole. C'eſt de-là que ces courbes ont tiré leurs noms *.

REMARQUE III. Nous avons vu que lorſque la ſection Ed coupe les deux côtés du cône Bac (fig. 30.) dans le cône même, la ſection Eidm eſt une Ellipſe; mais ſi l'angle Eda eſt $=$ Bca $=$ Kla (dans ce cas la ſection eſt appellée *ſubcontraire*), les triangles Ehl, dKh ayant les angles en l & d égaux, & les angles en h auſſi égaux (parce qu'ils ſont oppoſés au ſommet) ſeront ſemblables; donc E$h : lh :: Kh : dh$; donc E$h \times dh = hl \times$ K$h = \overline{hi}^2$ (par la propriété du cercle); donc E$h \times dh = \overline{hi}^2$. C'eſt-à-dire que le quarré de l'ordonnée eſt égal au produit des abſciſſes dh, hE. Ce qui caractériſe le cercle, lorſque les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes, comme cela arrive ici.

63. THÉORÊME. *Si l'on coupe un cylindre $amnb$ par un plan kl oblique au côté ma, la ſection ſera une Ellipſe* (fig. 33.) **. Suppoſons le cylindre coupé par un plan krh qui ne ſoit ni parallele à la baſe ab, ni au côté ma (car dans ce dernier cas il eſt viſible que les ſections ne peuvent être que des lignes droites). Que la commune ſection de ce plan avec le plan de la baſe ab ſoit déſignée par la ligne lP qui coupe à angles droits le Diametre ab prolongé s'il le faut. Suppoſons de plus le plan qrp parallele aux baſes du cylindre, & encore que $mabn$ ſoit perpendiculaire aux plans krh, qrp. La ligne rz commune interſection des deux plans krh, qrp ſera perpendiculaire au plan $mnab$ (Géo. 82.), & par conſé-

* Parabole ſignifie égalité, Ellipſe défaut, Hyperbole excès.

** Sous le nom d'Ellipſe nous comprenons le cercle, qui n'eſt qu'une Ellipſe, dont les axes ſont égaux.

quent à la ligne qp menée dans ce plan par le point z. Ayant divisé hk en deux également en g, soit $gh = a$, $gz = x$, $zr = y$, l'on aura $hz = a + x$, $kz = a - x$. Faisons de plus $qp = 2b$. Les triangles kzq, pzh semblables (à cause qu'ils ont les angles en z opposés au sommet, & les angles en k & h alternes internes) donnent $kz : qz :: hz : zp$ (*componendo*), $kz + hz : qz + zp :: kz : qz$, ou $2a : 2b :: a - x : qz$. De même on a $hz : zp :: kz : qz$, ou (*componendo*) $2a : 2b :: a + x : zp$. Multipliant ces deux proportions l'on a $4a^2 : 4b^2$, ou $a^2 : b^2 :: a^2 - x^2 : qz \times pz = (rz)^2 = y^2$ (par la propriété du demi-cercle qrp); donc $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$, équation à une Ellipse, dont le demi-grand axe $= a$, & le demi-petit axe $= b$. Si kh devient $= qp$, c'est à-dire si la section devient parallele à la base ab, alors $b = a$ & l'équation devient $y^2 = a^2 - x^2$ équation au cercle.

64. DÉFINITION. Si une Section Conique gda (fig. 34.) tourne sur son axe, elle engendrera un conoïde $agnm$, qui prendra le nom de *conoïde parabolique*, *elliptique*, ou *hyperbolique*, selon que la section sera une Parabole, une Ellipse ou une Hyperbole.

65. THÉORÊME. *Si l'on coupe un conoïde ngm supposé parabolique par un plan rq parallele à son axe, la section sera une Parabole.* Soit fait $gh = c$, le rayon ah du cercle décrit par le point a * $= r$, & celui du cercle décrit par le point $d = R$. Soit $lh = h$, la variable rp, $= z$**, $qh = pl = rB = x$, les ordonnées au cercle, dont dl est le rayon, égales à y. Par la nature de la parabole l'on a (4.) gh (c) : $\overline{ab}^2$ (r^2) :: gl ($c - h$) : $\overline{dl}^2$ :: $gB : \overline{rB}^2$; & parce que la différence des antécédents est à celle des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent, on aura $c : r^2 :: gl - gB = rp = z : (\overline{dl}^2 - \overline{rB}^2) = R^2 - x^2 = y^2$ (par la pro-

* Il faut concevoir le plan de la figure $grda$ perpendiculaire au plan de la planche.

** On peut prendre rp, plus ou moins grande ; donc z n'est pas constante.

priété

priété du cercle *), d'où l'on tire $r^2 z = c \times y^2$, ou $\frac{r^2}{c} \times z = y^2$, ou $y^2 = pz$, en faisant $c : r :: r : p$; or cette équation est à une parabole dont le parametre $= p$, l'abscisse z & l'ordonnée y; donc la section rq faite parallelement à l'axe est une parabole.

66. THÉORÊME. *Si la courbe génératrice gda est un quart d'Ellipse, je dis que la section rq faite parallelement à l'axe sera portion d'une Ellipse, dont les axes seront en même raison que ceux de la courbe génératrice.* Par la nature de l'Ellipse l'on a $(gh)^2$ ou c^2 (c'est le quarré du demi-grand axe) $: (ah)^2$ $(r^2) :: (gh)^2 - (hl)^2 = \overline{h+c} \times \overline{c-h}$ (c'est le produit des abscisses, ce qu'on verroit aisément en prolongeant gh jusqu'à l'autre sommet de l'Ellipse; car l'autre moitié du grand axe est $= c$): $(dl)^2$ $(R^2) :: (gh)^2 - (Bh)^2 = (c^2 - z^2) : (Br)^2$, ou x^2; & en divisant, $c^2 : r^2 :: z^2 - h^2 : R^2 - x^2 = y^2$; donc $y^2 = \frac{r^2}{c^2} \times (z^2 - h^2)$, équation à une Ellipse dont le demi-axe rq seroit $= z$, l'abscisse $= h$, & dont le demi-grand axe est au demi-petit axe comme $c : r$. Faisant donc $c^2 : r^2 :: z^2 = (rq)^2 : b^2$, on aura $b^2 = \frac{r^2 z^2}{c^2}$, & $b = \frac{rz}{c}$, c'est-à-dire qu'on trouvera le demi-petit axe de cette Ellipse, en prenant une quatrieme proportionnelle aux lignes gh, ha, rq. Cette proposition est utile pour calculer le volume d'eau que doit déplacer un vaisseau lorsqu'on augmente sa charge.

67. THÉORÊME. *La section rq sera une Hyperbole, si le Conoïde est hyperbolique.* Car soit gf le demi-premier axe de l'Hyperbole génératrice $= a$, le second demi-axe $fb = b$. Soit $rp = z$, qui devient rq lorsque dl se confond avec ah, $fh = c$, $fB = d$. Par la propriété de l'Hyperbole, $a^2 : b^2 :: c^2 - a^2 : r^2 :: c^2 - 2ch + h^2 - a^2 : R^2 :: c^2 - 2ch + h^2 - 2cz + 2hz +$

* $r^2 - x^2 = \overline{r+x} . \overline{r-x} = \overline{ln+lp} . \overline{ln-lp} = (dl+lp) . (dl-lp) = y^2$, en concevant une ordonnée y au Diametre dn qui rencontre ce Diametre en p.

$z^2 - a^2 : x^2$, & en divisant, $a^2 : b^2 :: 2cz - 2hz - z^2 : R^2 - x^2 (y^2)$; or $2c - 2h = 2fh - 2lh = 2fl$; donc $2cz - 2hz = 2fl \times z$, & $2cz - 2hz - z^2 = (2fl - z) \times z = (2fl - Bl) \times z = (2fB + Bl) \times z = (2fB + z) \times z$ (à cause de $Bl = rp = z) = (2d + z) \times z = 2dz + z^2$; donc $a^2 : b^2 :: 2dz + zz : y^2$, & $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2dz + z^2)$, équation à une Hyperbole, dont l'abscisse comptée depuis le sommet est $= z$, le premier axe $= 2d$, & le rapport du quarré du demi-premier axe à celui du demi-second axe (que j'appellerai $= g$) égal au rapport du quarré du demi-premier axe, au quarré du demi-second axe de l'Hyperbole génératrice. Donc on aura $a^2 : b^2 :: d^2 : g^2 = \frac{b^2 d^2}{a^2}$; donc $g = \frac{bd}{a}$; donc on aura $a :: b :: d : \frac{bd}{a}$. C'est-à-dire qu'on trouvera le second demi-axe g en prenant une quatrieme proportionnelle aux lignes a, b, d.

REMARQUE. Nous verrons dans la suite que toutes les Paraboles sont des courbes semblables, que les Ellipses dont les axes sont proportionnels sont aussi des courbes semblables, & qu'il en est de même des Hyperboles; donc en coupant un Conoïde parabolique, elliptique, ou hyperbolique, engendré par la révolution de sa courbe autour de son premier axe, il en résultera une courbe semblable à la courbe génératrice.

68. PROBLÊME. *Cuber un Conoïde parabolique* mag (fig. 35.), *formé par la révolution de la parabole autour de son axe.* Si l'on fait attention que dans la révolution de la courbe autour de ab, chaque ordonnée pn décrit un cercle; on verra aisément que les éléments du paraboloïde sont des cercles, qui depuis le sommet a vont en croissant comme les quarrés des ordonnées; c'est-à-dire comme les abscisses ap, ap, &c. En supposant ces abscisses en progression arithmétique $\div$ 0. 1. 2. 3. &c. (l'on suppose la premiere infiniment petite, ou $= 0$, ou $= \frac{1}{\infty}$ par rapport à la der-

niere), les quarrés des ordonnées seront comme les termes de cette progression, & le solide cherché sera $= \frac{b.A}{2}$. Car par la propriété de la progression, en supposant $=$ A le dernier cercle, ou le cercle de la base, & $= b$ la hauteur du conoïde (b représente le nombre des termes de la progression ÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5.... A), la somme des termes, ou le solide cherché sera $(0 + A) . b$ $= \frac{Ab}{2}$; puisque la somme d'une progression arithmétique est égale au produit des extrêmes par la moitié du nombre des termes. Mais $b.A$ représente un cylindre de même base A & de même hauteur b que le conoïde; donc un conoïde parabolique formé par la révolution de la parabole autour de son axe, est la moitié d'un cylindre de même base & de même hauteur.

69. PROBLÊME. *Trouver la solidité de l'Ellipsoïde, ou cuber l'Ellipsoïde* (fig. 6.). Si l'on conçoit qu'un cercle décrit sur le grand axe d'une Ellipse tourne autour de cet axe a A, aussi-bien que l'Ellipse, les ordonnées du cercle décriront des cercles qui seront aux cercles décrits par les ordonnées correspondantes de l'Ellipse, comme les quarrés des ordonnées du cercle aux quarrés des ordonnées de l'Ellipse (car les cercles sont comme les quarrés de leurs rayons), c'est-à dire comme le quarré du demi-grand axe au quarré du demi-petit axe (voyez le n° 34.). D'ailleurs le nombre des cercles (qu'il faut concevoir d'une épaisseur infiniment petite) qui forment la sphere engendrée par la révolution du cercle, est égal au nombre des cercles ou éléments de l'Ellipsoïde; donc la sphere décrite

E 2

par le cercle dont le diametre eſt égal au grand axe de l'Ellipſe, eſt à l'Ellipſoïde comme le quarré du demi-grand axe au quarré du demi-petit axe. Mais ſi l'on conçoit deux cylindres de même hauteur, dont l'un ait pour rayon de ſa baſe le demi-grand axe, l'autre le demi-petit axe, ces deux cylindres ſeront entre eux comme leurs baſes, ou comme les quarrés des rayons de leurs baſes, c'eſt-à-dire comme le quarré du demi-grand axe de l'Ellipſe au quarré du demi-petit axe; donc la ſphere eſt à l'Ellipſoïde, comme le cylindre circonſcrit à la ſphere, au cylindre circonſcrit à l'Ellipſoïde, ou (*alternando*) la ſphere eſt au cylindre qui lui eſt circonſcrit, comme l'Ellipſoïde eſt au cylindre qui lui eſt auſſi circonſcrit; or la ſphere eſt les $\frac{2}{3}$ du premier cylindre; donc l'Ellipſoïde eſt les $\frac{2}{3}$ du ſecond; donc l'Ellipſoïde vaut les $\frac{2}{3}$ d'un cylindre, dont la hauteur eſt égale au grand axe, & dont le rayon de la baſe eſt égal au petit demi-axe de l'Ellipſe génératrice. On démontrera par un raiſonnement ſemblable que l'Ellipſoïde, engendré par la révolution de l'Ellipſe autour du petit axe, eſt les $\frac{2}{3}$ d'un cylindre dont la hauteur eſt égale au petit axe, & dont le diametre de la baſe eſt égal au grand axe.

De quelques propriétés de l'Hyperbole, & d'une belle propriété de la Parabole, de l'Ellipſe & de l'Hyperbole, dont nous n'avons point encore parlé.

70. DÉFINITION. Si l'on prolonge les ordonnées dy à l'aſymptote d'une Hyperbole paralleles à l'autre aſymptote (fig. 36.) juſqu'à ce que $yh = yd$, & qu'on faſſe la même choſe ſur les autres trois branches des deux Hyperboles oppoſées, ſi par tous ces points on fait paſſer des courbes hbp, oBh', on aura

deux Hyperboles qui seront conjuguées aux deux premieres ad, AD & réciproquement, & dont les axes seront les mêmes, avec cette différence que le second axe des premieres sera le premier, & le premier des premieres Hyperboles sera le second axe des Hyperboles conjuguées. Pour prouver que ces courbes sont des Hyperboles, on remarquera que $dy = hy$, & parce que $Cy \times dy = \overline{CK}^2 = c^2$ (44.), on aura de même $Cy \times yh = x.y = c^2$.

COROLLAIRE. Donc $y = \frac{c^2}{x}$, pour l'une & l'autre branche ad & bh, c'est-à-dire que les ordonnées aux branches correspondantes des Hyperboles conjuguées sont en raison inverse de leurs abscisses. Faisant $x = \infty$, on aura $y = \frac{c^2}{\infty} = 0$; c'est-à-dire que l'asymptote Cy est censée tangente des branches ad, bh à une distance infinie, & Cy est une asymptote commune aux deux branches. En un mot les asymptotes des premieres Hyperboles sont aussi asymptotes des conjuguées.

Puisque le parallélogramme $baxC$ donne ba parallele à l'asymptote Cx, & par conséquent à l'ordonnée $dy = yh$, & que $aK = bK$ (44.), le point b appartient à l'Hyperbole hb & en est le sommet. De plus à cause qu'on trouve les asymptotes d'une Hyperbole en tirant des lignes par le centre C & les extrémités x, y d'une perpendiculaire au premier axe, égale au second axe & divisée en deux également par le sommet de l'Hyperbole, il est évident que by est le second demi-axe, & Cb le premier demi-axe de l'Hyperbole hbp.

71. THÉORÊME. *Si par l'extrémité h de l'ordonnée yh à l'asymptote de l'Hyperbole conjuguée hbp,*

on tire la ligne hCh' par le centre C jusqu'à la rencontre de l'autre Hyperbole conjuguée ; je dis que hh' sera le Diametre conjugué du Diametre dD, qui passe par le point d correspondant au point h. Car pour avoir le Diametre conjugué à dD, il faut tirer par le centre C, parallelement à la tangente au point d, la ligne hh', terminée en h & h' par les lignes dh, dh' paralleles aux asymptotes ; or cette construction donne $Ch = dr$, & $Ch = ds = dr$, à cause des Parallélogrammes $Chdr$, $Ch'ds$; mais en faisant $yh = yd$, on a $hd = Cr$: (car à cause des triangles semblables srC, sdy, $Cr = 2dy = dh$) ; donc $Crhd$ est un parallélogramme, & hC est $= dr$, propriété du Diametre conjugué.

COROLLAIRE. Il suit de-là que les Hyperboles conjuguées passent par les extrémités de tous les Diametres conjugués des premieres Hyperboles & réciproquement.

REMARQUE. L'équation des premieres Hyperboles rapportées à l'axe aA est $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$; mais l'axe aA étant le second axe des Hyperboles conjuguées, leur équation, par rapport à cet axe, sera $Y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 + x'x')$ en faisant l'abscisse prise sur cet axe $= x'$ & son ordonnée Y, équation qui differe totalement de la premiere ; donc les Hyperboles conjuguées ne sont pas une seule & même courbe avec les premieres.

72. COROLLAIRE. Il suit de cette Remarque que si l'on prend deux ordonnées au premier axe dans l'Hyperbole ad, nous les appellerons y, Y, & deux ordonnées au même axe aA dans l'Hyperbole bh, nous les appellerons p, P, on aura

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, $Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'x' - a^2)$, $p^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + u^2)$, $P^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + u'u')$. En faisant pour abréger, $\frac{b^2}{a^2} = d$, $x^2 - a^2 = s$, $x'x' - aa = S$, $aa + u^2 = q$, $aa + u'u' = Q$ (u & u' désignent les abscisses de l'Hyperbole bh), l'on aura $y^2 : ds :: Y^2 : dS :: p^2 : dq :: P^2 : dQ$ (car les termes de chacune de ces raisons sont égaux entre eux). Divisant les conséquents de ces proportions par d, il vient $y^2 : s :: Y^2 : S :: p^2 : q :: P^2 : Q$; donc $y^2 : s :: p^2 : q$, ou (en remettant les valeurs de s & de q, & *alternando*) $y^2 : p^2 :: x^2 - a^2 : a^2 + u^2$. C'est-à-dire que les quarrés des deux ordonnées, dont l'une appartient à une des premieres Hyperboles, & l'autre à l'Hyperbole conjuguée correspondante, sont entr'eux comme le produit des abscisses du premier Diametre à la somme du quarré de ce premier Diametre, & du quarré de l'abscisse comprise entre le centre & la rencontre de l'ordonnée abaissée d'un point quelconque de l'Hyperbole conjuguée sur ce même Diametre.

73. **Théorême.** Si des extrémités d & h' de deux Diametres conjugués on mene les lignes $h'N$, dP ordonnées au premier axe aA des premieres Hyperboles, le quarré de CN (u) compris entre le centre C & la rencontre de l'ordonnée $h'N$ est égal au produit $x^2 - a^2$ des abscisses de l'autre ordonnée dP. Car par le Corollaire précédent $\overline{dP}^2 : \overline{h'N}^2$ * ::

* Il faut se rappeller que le point h' appartient à une des Hyperboles conjuguées, étant l'extrémité d'un Diametre conjugué, par rapport à l'une des premieres Hyperboles.

$x^2 - a^2 : a^2 + u^2$; or à cause des triangles semblables TdP, ChN *, l'on a $\overline{Pd}^2 : \overline{hN}^2 :: \overline{TP}^2 : \overline{CN}^2$; donc $x^2 - a^2 : a^2 + u^2 :: \overline{TP}^2 : \overline{CN}^2 :: \overline{\frac{x^2 - a^2}{x^2}}^2 : u^2$; ainsi $u^2 \times (x^2 - a^2) = (a^2 + u^2) \cdot \frac{(x^2 - a^2) \cdot (x^2 - a^2)}{x^2}$. Divisant par $x^2 - a^2$ & multipliant par x^2, l'on a $u^2 x^2 = (a^2 + u^2) \cdot (x^2 - a^2) = a^2 x^2 - a^4 + u^2 x^2 - a^2 u^2$. Effaçant $u^2 x^2$ de part & d'autre & transposant l'on a $a^2 u^2 = x^2 a^2 - a^4$, & en divisant par a^2 on a enfin $u^2 = x^2 - a^2$.

COROLLAIRE. Donc $x^2 = a^2 + u^2$.

74. THÉORÊME. *Dans l'Ellipse* (fig. 16.) *la somme des quarrés de deux demi-Diametres conjugués quelconques* Cm, Cn *est constante & égale à la somme des quarrés des demi-axes.* Car par la propriété de l'Ellipse, $a^2 : b^2 :: Az \times az : \overline{zn}^2$; or (par le n° 53.) $Az \times za = \overline{CP}^2 = x^2$; donc $a^2 : b^2 :: x^2 : \overline{zn}^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Mais les triangles CPm, Cnz rectangles en P & z donnent $\overline{Cm}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{Pm}^2 = x^2 + b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}$ (parce que $\overline{Pm}^2 = b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}$ **), & $\overline{Cn}^2 = \overline{Cz}^2 + \overline{zn}^2 = a^2 - x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$ (parce que $\overline{Cz}^2$ (53.) $= a^2 - x^2$) ; donc $\overline{Cm}^2 + \overline{Cn}^2 = b^2 + a^2$.

---

* Parce que les angles P & N sont droits, & les angles en T & C alternes externes.

** Car (29.) l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (aa - x)^2$ donne $y^2 = b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}$.

75. THÉORÊME. *Dans l'Hyperbole* (fig. 37.) *la différence des quarrés des deux demi-Diametres conjugués quelconques* Cd, Ch' *est constante & égale à la différence des quarrés des demi-axes.* En effet l'équation des Hyperboles conjuguées, rapportées à l'axe aA, est $Y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 + u^2) = \frac{b^2}{a^2} x^2$ (parce que (73.) $a^2 + u^2 = x^2$); donc $(h'N)^2 = Y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Mais $(Cd)^2 = (NP)^2 + (Pd)^2 = x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$ *, & $(h'C)^2 = (CN)^2 + (h'N)^2 = x^2 - a^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$ (à cause de $(CN)^2$ (73.) $= x^2 - a^2$) donc $(Cd)^2 - (Ch')^2 = a^2 - b^2$, & $(Ch')^2 - (Cd)^2 = b^2 - a^2$.

COROLLAIRE. Dans l'Hyperbole équilatere, a étant égal à b, l'on aura $(Cd)^2 - (Ch')^2 = a^2 - b^2 = o$, & $Cd = Ch'$; donc dans l'Hyperbole équilatere tous les Diametres conjugués sont égaux deux à deux.

REMARQUE. En supposant $Cd = a$, $Ch' = b$, l'équation à l'Hyperbole équilatere, par rapport aux axes conjugués, sera évidemment $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x^2 - a^2) = x^2 - a^2$; donc pour savoir si cette équation appartient aux axes ou aux Diametres conjugués, il faut savoir si l'angle des coordonnées (l'abscisse avec l'ordonnée correspondante sont dites *coordonnées*) est droit ou oblique. Dans le premier cas l'équation est aux axes & aux diametres conjugués dans le second cas.

76. THÉORÊME. *Si les abscisses* cm, cn, cq, *&c.* (fig. 37.) *comptées sur une asymptote depuis le centre* c, *sont en progression géométrique croissante, les ordonnées seront en progression géométrique dé-*

* L'équation à l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x^2 - a^2)$ donne $(pd)^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2$.

croïssante. En effet puisque $x.y = c^2$ (44.), pour une autre x' & son Y on aura $x'Y = c^2$, &c. Donc lorsqu'une abscisse devient double, son ordonnée devient sous-double; lorsqu'une abscisse devient triple, son ordonnée devient sous-triple, &c. autrement le produit $x.y$ d'une abscisse quelconque par son ordonnée ne seroit pas égal à une quantité constante c^2; donc si les abscisses croissent en progression géométrique, les ordonnées décroissent en progression géométrique; donc, &c.

77. THÉORÊME. *Les abscisses* ck, cm, cn, cq, *&c. étant supposées en progression géométrique, leurs différences* km, mn, nq, *&c. seront aussi en progression géométrique.* C'est une suite de ce que nous avons démontré dans la premiere Partie, que les différences des termes consécutifs d'une progression géométrique, sont aussi en progression géométrique; donc, &c.

78. THÉORÊME. *Les aires hyperboliques* $kamm$, $mnmn$, *&c. établies sur ces différences, sont égales entr'elles.* Concevons que les différences km, mn, &c. sont partagées en un même nombre de parties égales pour chaque différence & infiniment petites par rapport aux lignes km, mn. Concevons de plus que les aires $kamm$, $mnmn$, &c. sont composées de petites surfaces $oomm$, $ppnn$ qui ont pour bases les parties infiniment petites, dont nous venons de parler. Ces petites surfaces seront les éléments des aires dont il s'agit; or ces éléments sont égaux en nombre par la supposition, mais de plus ils sont égaux entr'eux. En effet, puisque les lignes km, mn sont partagées en un même nombre de parties égales, chacune des parties om de la premiere est à chacune des parties pn de la

ſeconde comme $km : mn$; donc $om : pn :: km : mn$, & parce que l'on a par ſuppoſition $ck : cm :: cm : cn$, on aura $ck - cm$ (km) : $cm :: cn - cm$ (mn) : cn, ou (*alternando*) $km : mn :: cm : cn$; mais l'abſciſſe $cm \times mm =$ l'abſciſſe $cn \times nn$; donc $cm : cn :: nn : mm$; donc $om : pn :: nn : mm$ & $om \times mm = pn \times nn$, ou $oamm = ppnn$; donc les éléments de l'aire $kamm$ ſont égaux en nombre & en grandeur à ceux de l'aire $mnmn$; donc ces aires ſont égales; donc, &c.

COROLLAIRE. Si l'on prend une infinité d'abſciſſes en progreſſion géométrique, à un nombre infini de différences répondra un nombre infini d'aires égales & finies; donc l'eſpace aſymptotique compris entre l'Aſymptote & l'Hyperbole eſt infini.

REMARQUE I. Nous avons ſuppoſé dans cette démonſtration que les éléments ou trapezes $omom$, $pnpn$ étoient des rectangles, ce qui n'eſt pas abſolument vrai; mais lorſque les lignes om, pn ſont infiniment petites, les trapezes $omom$, &c. peuvent être regardées comme des rectangles, du moins dans le cas de l'Hyperbole équilatere : car alors l'angle des aſymptotes eſt droit, puiſque dans ce cas $ax = BC = Ca$ (fig. 11.), ce qui rend iſocelle le triangle rectangle Cax; donc l'angle xCa eſt de 45° auſſi-bien que l'angle yCa; donc l'angle xCy eſt de 90°, ce qui n'arrive que dans ce cas. En ſuppoſant que l'Hyperbole de la fig. 37 eſt ſcalene (c'eſt-à-dire qu'elle a les axes inégaux), les petites trapezes $omom$, &c. peuvent être regardées comme des parallélogrammes qui ont les côtés adjacents aux angles égaux m, n, réciproquement proportionnels.

REMARQUE II. Dans le cas de l'Hyperbole ſcalene

les petits trapezes *oomm*, *ppnn* seroient égaux au produit de la base par la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de chaque ordonnée *mm*, *nn* sur la base, & ces perpendiculaires formeroient, avec l'ordonnée, la partie de l'asymptote comprise entre l'ordonnée & la perpendiculaire des triangles semblables, dont les hauteurs seroient proportionnelles aux ordonnées correspondantes. Donc les parallélogrammes dont nous venons de parler, qui ont pour hauteurs ces perpendiculaires, ont leurs bases réciproques à leurs hauteurs, ce qui les rend égaux. De plus ces perpendiculaires sont comme le sinus des angles correspondants $aom = xcm$; donc les aires hyperboliques, dans le cas de l'Hyperbole scalene, sont aux aires hyperboliques établies sur des lignes égales dans le cas de l'Hyperbole équilatere, comme le sinus de l'angle des asymptotes est au sinus total.

79. THÉORÊME. *Si par les points a, m, n, &c. de la courbe & par le centre c on tire les lignes ca, cm, cn, &c. les secteurs hyperboliques cak, cmm, &c. seront égaux entr'eux & aux trapezes hyperboliques akmm, mnmn, &c. correspondants.* Il est évident (44.) que $ck \times ak = cm \times mm$, ce qui donne $ck : cm :: mm : ak$, c'est-à-dire que les triangles cka, cmm ont des côtés réciproques adjacents à des angles égaux : or il est visible que les hauteurs de ces triangles sont entr'elles comme les côtés ak, mm, c'est-à-dire, en raison inverse, des bases, ou des moitiés des bases; donc ces triangles sont égaux. Otant de part & d'autre la partie commune chk, l'on aura $cah = hkmm$, & ajoutant de part & d'autre l'aire ahm, il en résultera le secteur $cam = akmm$, & ainsi des autres; donc, &c.

COROLLAIRE. Il ſuit des deux derniers Théorèmes que les ſecteurs, de même que les trapezes hyperboliques, qui répondent à des abſciſſes en progreſſion géométrique, ſont eux-mêmes en progreſſion arithmétique; donc ſelon ce que nous avons dit dans la premiere Partie de cet Ouvrage, ils peuvent être regardés comme les logarithmes de ces abſciſſes. Ainſi ſuppoſant que ck repréſente le nombre dont le logarithme eſt $= 0$, l'aire $akmm$ repréſentera le logarithme du nombre cm, l'aire $aknn$ celui du nombre cn, &c. Ces logarithmes ſont appellés *hyperboliques*, lorſque l'Hyperbole eſt équilatere.

80. PROBLÊME. *Suppoſant l'Hyperbole aq équilatere & l'abſciſſe $co =$ l'ordonnée $oo = 1$, trouver l'aire oonn.* Par la nature de l'Hyperbole, en faiſant $on = x$, l'on a $oo \times co = cn \times nn$, ou $1 \times 1 = (1 + x) \times y$, ou $1 = y \times (1 + x)$, d'où l'on tire $y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$, &c. (en élevant $1 + x$ à la puiſſance -1 par le binome de Newton) $= 1 (x^0 - x + x^2 - x^3 + x^4$ &c.) à cauſe de $x^0 = 1$. Cela poſé, ſi l'on pouvoit ſommer tous les y (que je ſuppoſe d'une largeur infiniment petite) compris entre les ordonnées oo & nn, on auroit l'aire cherchée; ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'on pouvoit avoir la ſomme de toutes les ſéries $x^0 - x + x^2$, &c. correſpondantes à chaque y; or on peut concevoir les x comme croiſſantes ſelon la progreſſion $\div$ 0. 1. 2. 3. &c. juſqu'à la derniere $x = on$ qu'on ſuppoſera $= \infty$, à cauſe qu'elle eſt infiniment plus grande que la premiere, qu'on peut ſuppoſer infiniment petite; mais par la formule $\frac{\infty^{m+1}}{m+1}$ que nous avons donnée dans la premiere Partie de cet Ouvrage, la ſomme de x^0 eſt

$= x$, celle de $-x$ eſt $= -\frac{x^2}{2}$, celle de x^2 ou du troiſieme terme eſt $= \frac{x^3}{3}$, &c.; donc l'aire cherchée eſt $= 1 \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} \text{ \&c.}\right)$. Si l'on faiſoit $ok = -x$ (à cauſe que les x qui alloient ci-devant de o en n vont maintenant dans un ſens oppoſé), on auroit $ck = 1 - x$, & ſuppoſant $ak = y$ on auroit $(1 - x) \times y = 1$, ou $y = \frac{1}{1-x}$, ou (en effectuant la diviſion) $y = 1 + x + x^2 + x^3$, &c. & l'on trouveroit de même que l'eſpace $ooak$ eſt $= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, &c.

COROLL. I. Puiſque les eſpaces dont nous venons de parler repréſentent, le premier le logarithme du nombre cn plus grand que l'unité, le ſecond celui du nombre $ck < 1 = co$, par hypotheſe; les ſéries que nous venons de trouver repréſenteront auſſi les logarithmes hyperboliques de ces mêmes nombres $1 + x$ & $1 - x$; mais le logarithme du nombre $1 - x$ plus petit que l'unité, & par conſéquent fractionnaire, doit être négatif; donc il faudra changer le ſigne des termes de la ſeconde ſérie, ce qui les rendra tous négatifs, & l'on aura, en général pour repréſenter les logarithmes hyperboliques d'un nombre plus grand ou plus petit que l'unité, la ſérie $\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5}$, &c.

REMARQUE. Cette ſérie ne peut être utile qu'en ſuppoſant $x = 1$ ou $x < 1$, autrement elle ne ſeroit pas convergente. Mais en ſuppoſant $x < 1$,

les termes ultérieurs seront d'autant plus petits que x sera plus petite.

COROLLAIRE II. Pour avoir le logarithme du quotient d'un nombre divisé par un autre nombre, il suffit, selon ce que nous avons dit dans la premiere Partie de cet Ouvrage, de retrancher le logarithme du diviseur de celui du dividende; donc L. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (L. désigne un logarithme) se trouvera en ôtant la série $-x-x^2-x^3$, &c. de la série $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, &c. ce qui donnera

$$\text{L.}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+, \&c.$$

COROLLAIRE III. Suppofant $\frac{1+x}{1-x}=\frac{p}{q}$, l'on aura, en faisant disparoître les dénominateurs, $q+qx=p-px$, & en transposant, $qx+px=p-q$, & en divisant par $p+q$, $x=\frac{p-q}{p+q}$; donc $\text{L.}\left(\frac{p}{q}\right)=2x+\frac{2x^3}{3}$ &c. Si dans cette série on substitue les valeurs de x, x^3, &c. tirées de l'équation $x=\frac{p-q}{p+q}$, on aura ce logarithme exprimé en nombres, en supposant que p & q sont des nombres connus.

Soit par exemple le nombre 2, dont on demande le logarithme hyperbolique. Faites $\frac{1+x}{1-x}=\frac{p}{q}=\frac{2}{1}$, en faisant $p=2$ & $q=1$ (si le nombre proposé étoit fractionnaire & $=\frac{1}{2}$, par exemple, on

feroit $\frac{1}{2} = \frac{p}{q}$), & vous aurez $x = \frac{p-q}{p+q} = \frac{1}{3}$. Substituant cette valeur de x dans la série $2x + \frac{2x^3}{3} + \&c.$ l'on aura le logarithme hyperbolique cherché ; ce qu'on peut pratiquer ainsi : en réduisant en décimales & ne poussant pas l'approximation au-delà des cent millioniemes.

$x = \frac{1}{3} = \frac{1}{1} \times 0.3333333 = 0.33333333.$

$\frac{x^3}{3} = \frac{1}{9} \times \frac{x}{3} = \frac{1}{3} \times 0.03703703 = 0.01234567.$

$\frac{x^5}{5} = \frac{1}{9} \times \frac{x^3}{5} = \frac{1}{5} \times 0.00411522 = 0.00082304.$

$\frac{x^7}{7} = \frac{1}{9} \times \frac{x^5}{7} = \frac{1}{7} \times 0.00045724 = 0.00006532.$

$\frac{x^9}{9} = \frac{1}{9} \times \frac{x^7}{9} = \frac{1}{9} \times 0.00005080 = 0.00000564.$

$\frac{x^{11}}{11} = \frac{1}{9} \times \frac{x^9}{11} = \frac{1}{11} \times 0.00000564 = 0.00000051.$

SOMME = ... 0.34657351.
Dont le double . . . . 0.69314702.
est le logarithme hyperbolique de 2.

81. THÉORÊME. *Dans deux Hyperboles les aires asymptotiques correspondantes aux différences des abscisses consécutives égales chacune à chacune & en progression géométrique, sont dans un rapport constant.* Car prenant quatre de ces aires dans l'une & l'autre Hyperbole, elles seront égales entr'elles (78.) (s'entend dans chaque Hyperbole), & leurs sommes qui désignent le logarithme de la plus grande abscisse (la plus petite abscisse étant supposée = 1) dans l'une &

l'autre Hyperbole, feront entr'elles comme deux aires correfpondantes quelconques ; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc fi l'on fuppofe une Hyperbole qui foit telle que fes aires afymptotiques repréfentent les logarithmes des tables, tandis que les abfciffes afymptotiques repréfenteront les nombres correfpondants à ces logarithmes, on aura toujours le logarithme tabulaire d'un nombre 10, par exemple, au logarithme hyberbolique du même nombre, comme le logarithme tabulaire du nombre 2, au logarithme hyperbolique du même nombre ; donc 0.301030 (log. tab. de 2.) : 0.693147 (log. hyp. de 2, en s'en tenant aux millioniemes) :: 1 (log. tab. de 10) : 2.302585 (log. hyp. de 10). Maintenant pour trouver le logarithme tabulaire d'un nombre x, dont on a le logarithme hyperbolique, en fuppofant m le logarithme hyperbolique de x, on fera cette proportion 2.302585 : $1 :: m : y = m \times \frac{1}{2.302585}$ (log. tab. de x), ou (en effectuant la divifion de 1 par 2.302585) $y = m \times 0.434294$; donc pour avoir le logarithme tabulaire d'un nombre quelconque, il fuffit de multiplier fon logarithme hyperbolique par 0.434294 ; & parce que $y = m \times 0.434$ &c. l'on aura $m = \frac{y \times 1}{0.434 \text{ \&c.}} = y \times 2.302585$, c'eft-à-dire que le logarithme hyperbolique d'un nombre eft égal au logarithme tabulaire du même nombre, en le multipliant par 2.302585.

82. Avant de paffer plus loin, nous allons dire un mot de ce que nous entendons par *finus & cofinus hyperboliques*. Soit (fig. 38.) le demi-axe pa d'une Hyperbole saf fuppofée équilatere $= r$, nous

l'appellerons *sinus total*, pour conserver l'analogie avec le cercle. En faisant $= m$ le logarithme hyperbolique d'un nombre désigné par pg, menant l'ordonnée cg perpendiculaire à l'asymptote pg, & la perpendiculaire cb à l'axe, la ligne pb sera le *cosinus*, & bc le *sinus* de m. Le sinus de m sera désigné par $s\,h.\,m$, le cosinus par $c\,h.\,m$.. parce que au point a, $bc = 0$, & $pb = pa = r$, en menant les lignes sr, ak paralleles à gc, l'on aura pour le nombre répréfenté par pk, $s\,h.\,m = 0$, & $c\,h.\,m = r$. Les m qui répondent aux nombres plus petits que pk, qu'on peut supposer $= 1$ (car l'unité est une quantité arbitraire), sont négatifs & ont leurs cosinus positifs, mais leurs sinus sont négatifs. Si l'on fait $pg : pk :: pk : pr$, on aura $pr = \frac{1}{pg}$ (à cause de $pk = 1$). Ainsi le logarithme de pr sera $= \text{L}.\,1 - m = 0 - m = -m$, parce que le logarithme hyperbolique de 1 est $= 0$, comme son logarithme tabulaire. Ayant tiré rs, si l'on joint les points s, c par la ligne sc, je dis que cette ligne est perpendiculaire à l'axe. Les triangles igc, irs semblables à cause des paralleles gc, rs donnent $ig : ir :: gc : rs :: pr : pg$ (par la propriété de l'Hyperbole) & en divisant, $ig : rg :: pr : rg$; donc $ig = pr$. D'ailleurs $pr : pk :: ur : ak$ (à cause des triangles semblables pru, pak); & comme $pr : pk :: pk : pg :: gc : ak$, on aura $ru : ak :: gc : ak$, ou (*alternando*) $ru : gc :: ak : ak$; donc $gc = ru$; donc les triangles rectangles pru, igc ont les côtés qui comprennent l'angle droit égaux; donc ils sont égaux en tout, & l'angle $gic = upr$; mais $upr = 45^\circ$; donc son complément pur est aussi de 45°; donc dans le triangle

pbi, on a l'angle p & l'angle i chacun de 45°; donc l'angle b est $= 90^\circ$; donc la ligne sci est perpendiculaire sur l'axe pb.

COROLLAIRE. Il suit de cette démonstration que $ch. m = ch. -m$, puisque l'un & l'autre est $= pb$ *. Mais $sh. + m = - sh. m$: puisque $sh. m = bc$, & $sh. - m = bs$; & quoique $bc = bs$, cependant l'un est positif & l'autre négatif.

83. PROBLÊME. *Etant donnés les sinus & les cosinus de deux logarithmes m, n, trouver le sinus & le cosinus de leur somme $m + n$.* Soit $pb = ch. m$, $bc = sh. m$, $pd = ch. n$, $df = sh. n$. Soit supposé $pm = ch. \overline{m+n}$, & $mn = sh. \overline{m+n}$. A cause de l'angle $apk = 45^\circ = pib$, on a $pb = bi$, & de même $pd = dl$, $pm = mq$. On aura donc $ci = ib - bc = pb - bc = ch. m - sh. m$, $fl = ch. n - sh. n$, $nq = ch. \overline{m+n} - sh. \overline{m+n}$. De plus à cause du triangle isocelle apk rectangle en k & de $pa = r$ on a $\overline{pk}^2 + \overline{ak}^2$, ou $2. \overline{pk}^2 = r^2$, $\overline{pk}^2 = \frac{r^2}{2}$ & $pk = \frac{r}{\sqrt{2}}$. A cause du triangle rectangle isocelle igc, on a $2. \overline{gi}^2 = \overline{ci}^2$, ou $gi = \frac{ci}{\sqrt{2}} = \frac{ch. m - sh. m}{\sqrt{2}}$. De même $hl = \frac{ch. n - sh. n}{\sqrt{2}}$ & $qo = \frac{ch. (m+n) - sh. (m+n)}{\sqrt{2}}$. Enfin le triangle pbi rectangle en b donne $\overline{pi}^2 = \overline{pb}^2 + \overline{bi}^2 = 2. \overline{pb}^2$, ou $pi = \sqrt{2} \times ch. m$.

* Car le cosinus de m est la partie de l'axe comprise entre le centre & l'ordonnée menée du point auquel la perpendiculaire tirée sur l'asymptote au point où se termine le nombre pr, ou pg, rencontre l'Hyperbole.

On voit aussi que $pl = \sqrt{2} \times ch.\,n$, & $pq = \sqrt{2} \times ch.\,\overline{m+n}$. C'est pourquoi $pg = \sqrt{2} \times ch.\,m - \left(\frac{ch.\,m - sh.\,m}{\sqrt{2}}\right)$, ou en réduisant l'entier en fraction, $pg = \frac{ch.\,m + sh.\,m}{\sqrt{2}}$. De même $ph = \frac{ch.\,n + sh.\,n}{\sqrt{2}}$, & $po = \frac{ch.(m+n) + sh.(m+n)}{\sqrt{2}}$; or $pk : pg :: ph : po$*; donc $\frac{r}{\sqrt{2}} : \frac{ch.\,m + sh.\,m}{\sqrt{2}} :: \frac{ch.\,n + sh.\,n}{\sqrt{2}} : \frac{ch.(m+n) + sh.(m+n)}{\sqrt{2}}$; d'où l'on tire l'équation (A) $ch.(m+n) + sh.(m+n) = \frac{(ch.\,m + sh.\,m) \times (ch.\,n + sh.\,n)}{r}$. Maintenant l'équation à l'Hyperbole équilatere donne $y^2 = \overline{bc}^2 = \overline{sh.\,m}^2 = x^2 - a^2 = \overline{pb}^2 - \overline{pa}^2 = \overline{ch.\,m}^2 - r^2$. Donc $\overline{ch.\,m}^2 - \overline{sh.\,m}^2 = r^2 = (ch.\,m + sh.\,m) \times (ch.\,m - sh.\,m)$, ou $ch.\,m + sh.\,m = \frac{r^2}{ch.\,m - sh.\,m}$. Par la même raison $ch.\,n + sh.\,n = \frac{r^2}{ch.\,n - sh.\,n}$ & $ch.\,\overline{m+n} + sh.\,\overline{m+n} = \frac{r^2}{ch.(m+n) - sh.(m+n)}$. Substituant dans l'équation A les valeurs que nous ve-

* Le logarithme de $pk = 1$ étant $= 0$, & le logarithme de po étant égal, par l'hypothése, à la somme des logarithmes de pg & ph, les logarithmes de pk & po, seront les extrêmes d'une proportion arithmétique, dont les logarithmes de pg & ph seront les moyens; donc les nombres auxquels appartiennent ces logarithmes sont en proportion géométrique.

nons de trouver pour $ch.m + sh.m$, & $ch.n + sh.n$, & réduisant on aura $\frac{r^2}{ch.(m+n) - sh.(m+n)} = ch.(m+n) + sh.(m+n) = \frac{r^3}{\overline{ch.m - sh.m} \times \overline{ch.n - sh.n}}$; donc en ôtant les fractions, divisant par r^3 & transposant, on trouvera l'équation $ch.\overline{m+n} - sh.\overline{m+n} = \frac{(ch.m - sh.m) \times (ch.n - sh.n)}{r}$ (B).

Ajoutant l'équation B avec l'équation A (on peut regarder ces deux équations comme deux beaux Théorêmes), retranchant ensuite l'équation B de l'équation A, on aura $ch.(m+n) = \frac{\overline{ch.m + sh.m} \times \overline{ch.n + sh.n} + \overline{ch.m - sh.m} \times \overline{ch.n - sh.n}}{2r}$
$= \frac{ch.m \times ch.n + sh.m \times sh.n}{r}$ (C) & $sh.\overline{m+n} =$
$\frac{\overline{ch.m + sh.m} \times \overline{ch.n + sh.n} - (\overline{ch.m - sh.m} \times \overline{ch.n - sh.n})}{2r}$
$= \frac{ch.m \times sh.n + ch.n \times sh.m}{r}$ (D) ce qu'il falloit trouver.

84. PROBLÊME. *Trouver le cosinus & le sinus de la différence des deux logarithmes m & n. Nous supposons $m > n$.* Il suffit de mettre dans les deux dernieres formules, à la place de $ch.n$ & $sh.n$, les quantités $ch.-n$ & $sh.-n$; mais $sh.-n = -sh.n$, & $ch.-n = ch.n$ (car si pr est supposé égal à un nombre $< 1 = pk$, le sinus sb de ce nombre est négatif; mais son cosinus pb est évidemment positif; donc il suffit dans les for-

mules précédentes de donner le signe — à $sh. n$ & l'on aura

$$ch.(m-n) = \frac{ch.m \times ch.n - sh.m \times sh.n}{r}.$$

$$sh.(m-n) = \frac{ch.n \times sh.m - ch.m \times sh.n}{r}.$$

Si l'on suppose $m = n$, qu'on ajoute l'équation D avec l'équation C, & qu'on retranche ensuite l'équation D de l'équation C, l'on aura ces deux autres équations

$$ch.\,2m + sh.\,2m = \frac{(ch.m + sh.m)^2}{r} \quad (F)$$

$$ch.\,2m - sh.\,2m = \frac{(ch.m - sh.m)^2}{r} \quad (G)$$

ajoutant G avec F & divisant par 2, retranchant ensuite G de F & divisant de même par 2, l'on a les deux équations suivantes.

$$ch.\,2m = \frac{\overline{ch.m + sh.m}^2 + \overline{ch.m - sh.m}^2}{2r}$$

$$sh.\,2m = \frac{\overline{ch.m + sh.m}^2 - (\overline{ch.m - sh.m}^2)}{2r}$$

Si avant d'ajouter & de retrancher les équations G & F on prend les racines quarrées de chaque membre, l'on aura

$$ch.m = \frac{\overline{ch.\,2m + sh.\,2m}^{\frac{1}{2}} + \overline{ch.\,2m - sh.\,2m}^{\frac{1}{2}}}{2.r^{\frac{1}{2}}}$$

$$sh.m = \frac{\overline{ch.\,2m + sh.\,2m}^{\frac{1}{2}} - \left(\overline{ch.\,2m - sh.\,2m}^{\frac{1}{2}}\right)}{2.r^{\frac{1}{2}}}$$

Si aux deux logarithmes m & n on en ajoute un troisieme, p, il suit des équations A & B (83.) qu'on aura

$$ch.\,\overline{m+n+p} + sh.\,\overline{m+n+p} = \frac{\overline{ch.\,(m+n)+sh.\,(m+n)} \times \overline{ch.\,p+sh.\,p}}{r},$$

$$ch.\,\overline{m+n+p} - sh.\,\overline{m+n+p} = \frac{\overline{ch.\,(m+n)-sh.\,(m+n)} \times \overline{ch.\,p-sh.\,p}}{r}.$$

Subſtituant dans ces équations les valeurs de $ch.\,\overline{m+n} + sh.\,\overline{m+n}$ & de $ch.\,\overline{m+n} - sh.\,\overline{m+n}$ priſes des équations A & B, on aura ces deux autres Théorêmes :

$$ch.\,\overline{m+n+p} + sh.\,\overline{m+n+p} = \frac{\overline{ch.\,m+sh.\,m} \times \overline{ch.\,n+sh.\,n} \times \overline{ch.\,p+sh.\,p}}{r^2} \quad (H)$$

$$ch.\,\overline{m+n+p} - sh.\,\overline{m+n+p} = \frac{\overline{ch.\,m-sh.\,m} \times \overline{ch.\,n-sh.\,n} \times \overline{ch.\,p-sh.\,p}}{r^2} \quad (I)$$

Suppoſant $m = n = p$, ajoutant I à H & l'en retranchant enſuite, on aura

$$ch.\,3m = \frac{\overline{ch.\,m+sh.\,m}^3 + \overline{ch.\,m-sh.\,m}^3}{2.\,r^2}.$$

$$sh.\,3m = \frac{\overline{ch.\,m+sh.\,m}^3 - (\overline{ch.\,m-sh.\,m}^3)}{2.\,r^2}$$

Si avant d'ajouter & de ſouſtraire, on prend les racines cubiques, on trouvera

$$ch.\,m = \frac{\overline{ch.\,3m+sh.\,3m}^{\frac{1}{3}} + \overline{ch.\,3m-sh.\,3m}^{\frac{1}{3}}}{2.\,r^{-\frac{2}{3}}}$$

$$sh.\,m = \frac{\overline{ch.\,3m+sh.\,3m}^{\frac{1}{3}} - (\overline{ch.\,3m-sh.\,3m}^{\frac{1}{3}})}{2.\,r^{-\frac{2}{3}}}$$

En général on aura

$$c\,h.\,n\,m = \frac{\overline{c\,h.\,m + s\,h.\,m}^{\,n} + \overline{c\,h.\,m - s\,h.\,m}^{\,n}}{2 \times r^{n-1}}$$

$$s\,h.\,n\,m = \frac{\overline{c\,h.\,m + s\,h.\,m}^{\,n} - \left(\overline{c\,h.\,m - s\,h.\,m}^{\,n}\right)}{2 \times r^{n-1}},$$

n étant un nombre quelconque. En comparant ces formules avec celles des ſinus & coſinus des arcs circulaires multiples, on verra qu'il y a une grande analogie entre les ſinus & coſinus circulaires & les hyperboliques.

Nous appellerons *logarithmes hyperboliques ſimples*, ou *d'une dimenſion*, les logarithmes hyperboliques dont nous venons de parler; mais diviſés par $\frac{r}{2}$, c'eſt-à-dire par la moitié du demi-axe $p\,a$ de l'Hyperbole équilatere, dont l'axe $= 2\,r$ & les ſinus & coſinus hyperboliques, dont nous venons de parler, pourront auſſi être regardés comme les ſinus & coſinus de ces logarithmes hyperboliques ſimples. Mais le triangle iſocelle & rectangle $p\,a\,k$ donne $(p\,a)^2 = (p\,k)^2 + (a\,k)^2$ ou $r^2 = 2.(p\,k)^2$, ou $(p\,k)^2 = \frac{r^2}{2}$, $p\,k = \frac{r}{\sqrt{2}}$; & en diviſant les logarithmes hyperboliques pris dans une Hyperbole équilatere dont le demi-axe $= r$, par $\frac{r}{2} =$, ou, ce qui revient au même, en les multipliant par $\frac{2}{r}$, on aura ce que nous appellons *logarithmes hyperboliques ſimples*. Si l'on fait $p\,k = \frac{r}{\sqrt{2}} = 1$,

l'on aura $r^2 = 2$ & $r = \sqrt{2}$; donc $\frac{r}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; c'est pourquoi si l'on divise les logarithmes hyperboliques vulgaires par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou qu'on les multiplie par $\sqrt{2}$, on aura les logarithmes hyperboliques simples, pris dans la même Hyperbole dont le demi-axe $= \sqrt{2}$, & les premiers seront alors aux seconds, comme $1 : \sqrt{2}$ ou comme $\sqrt{2} : 2$.

85. THÉOREME. *Dans toute Section Conique si une ligne mp passant par le foyer f rencontre la directrice en q & la courbe en deux points m, p, le point m étant situé entre les points f & q, cette ligne sera divisée dans les points m & f* (fig. 39.), *& dans les points m & q* (fig. 40.) *en proportion harmonique.* Car (voyez le n° 61) (dans la figure 29) les lignes mp, $m'p'$ ont un rapport constant avec les rayons vecteurs fm, fm', ce qui a lieu dans toute Section Conique; donc la raison de chaque rayon vecteur fm à chaque ligne correspondante gm sera constante. En effet $fm : gm :: fm \times pm : gm \times pm$; donc la raison de $fm : gm$ est composée de la raison constante de $fm : pm$ & de la raison de $pm : gm$ qui est la même que la raison du sinus d'inclinaison au sinus total, ce qui a lieu pour toutes les paralleles à mg, qu'on pourroit mener de la courbe à la directrice, & l'on doit dire la même chose de toutes les Sections Coniques, Parabole, Ellipse & Hyperbole. Cela posé, revenant aux figures 39 & 40, l'on aura $fp : fm :: pq : mq$; or (fig. 39) dans les trois lignes pq, fq, mq les lignes pq, mq sont les extrêmes, & les droites fp, fm les différences des extrêmes à la moyenne; mais (fig. 40) dans les trois droites fp, fq, fm les lignes fp, fm sont les extrêmes, & les droites pq, mq les différences des extrêmes à la moyenne; donc dans les deux figures les extrêmes seront entr'elles comme les différences des extrêmes à la moyenne, ce qui donne une proportion harmonique. Voyez ce que nous avons dit sur la nature de cette proportion dans le Calcul (n°. 40).

**

REMARQUE. La figure 39 peut servir pour l'ellipse & la parabole, (& même pour le cercle en supposant qn à une distance infinie du point f): La ligne qn représente la directrice.

Des Sections Coniques semblables.

86. *Deux Sections Coniques de même espece sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels.*

COROLLAIRE I. Il suit de cette définition que si deux Ellipses ou deux Hyperboles semblables ont un centre commun c (fig. 41 & 43) & leurs axes sur les mêmes lignes, les Diametres conjugués correspondants seront aussi sur les mêmes lignes. En effet ces Diametres doivent faire avec les axes des angles égaux, puisque les Sections ne différent l'une de l'autre que parce que les lignes de l'une sont plus grandes que les lignes correspondantes de l'autre: mais d'ailleurs elles sont semblablement situées & dans le rapport des axes; de sorte que si les axes & diametres de la petite venoient à s'allonger, en conservant toujours leur même rapport, jusqu'à ce qu'ils fussent égaux à ceux de la grande, les deux Sections, se confondroient.

COROLLAIRE II. Donc si une ligne rs coupe deux Sections Coniques semblables, qui ont un centre commun & situé sur le même axe ad, les parties ro, so' de cette ligne comprises entre les deux courbes seront égales. Car si l'on conçoit une tangente SR à la courbe intérieure parallele à sr (fig. 41, 42 & 43), & le Diametre xy qui passe par le point de contingence, la ligne oq sera une ordonnée à ce Diametre; & parce que le Diametre correspondant de la Section intérieure est sur la même ligne que celui de l'extérieure, il est visible que les lignes rs, RS seront des doubles ordonnées à la Section extérieure. Donc $rq = sq$, & $Rt = tS$. De même $oq = qo'$; donc $or = o's$; & par la même raison $om = in$, $dl = dL$. Ce que nous venons de dire dans ce Corollaire a lieu pour la Parabole, qu'on peut regarder comme une Ellipse infinie.

87. THÉOREME. *En supposant* $= p$ *les parametres de la parabole intérieure & extérieure égales & situées sur le même axe, je dis qu'en faisant la tangente* $dL = d$, *l'on aura* $mo \times on = d^2$ (fig. 42). Par la propriété de la parabole extérieure on a $p \times ap = (mp)^2$, & par la

propriété de la parabole intérieure on a $p \times dp = (po)^2$; donc $(pm)^2 - (po)^2 = no \times mo = ap \times p - dp \times p = p.ad = (dL)^2 = d^2$; donc $mo \times on = d^2$.

REMARQUE I. Si au lieu de prendre les ordonnées à l'axe on avoit pris les ordonnées aux Diametres xy, on auroit trouvé $ro \times os = (Rt)^2 = (tS)^2$.

REMARQUE II. Puisque les paraboles ne différent que par leurs parametres, comme les cercles ne différent que par la grandeur de leurs rayons, il est visible que les paraboles sont des figures semblables.

88. THÉOR. *Dans les Ellipses & Hyperboles semblables* (fig. 41 & 43) *on aura toujours* $ro \times os = (tR)^2$. Car appellons $2a$ le Diametre xy, $2b$ son conjugué, y les ordonnées rq au Diametre xy, Y les ordonnées oq de la courbe intérieure par rapport au Diametre correspondant, $2c$ le Diametre de la courbe intérieure, $2d$ son conjugué; & faisant $cq = x$, on a, par la propriété de l'Ellipse & de l'Hyperbole extérieures, $y^2 : \pm a^2 \mp x^2 :: b^2 : a^2$, & pour les courbes intérieures l'on a $Y^2 : \pm c^2 \mp x^2 :: d^2 : c^2$; mais parce que les courbes intérieures sont semblables aux extérieures, $b^2 : a^2 :: d^2 : c^2$; donc $y^2 : Y^2 :: \pm a^2 \mp x^2 : \pm c^2 \mp x^2$, & (*dividendo*) $y^2 - Y^2$ $(ro \times os) : y^2 :: \pm a^2 \mp c^2 : \pm a^2 \mp x^2 :: (tR)^2 : (qr)^2 = y^2$; donc $ro \times os : y^2 :: (tR)^2 : y^2$, & (*alternando*) $ro \times os : (tR)^2 :: y^2 : y^2$; donc $ro \times os = (tR)^2$.

COROLLAIRE I. Si les ordonnées appartenoient au premier axe, on auroit $mo \times on = (dL)^2 = g^2$ en faisant $dL = g$.

COROLLAIRE II. Supposant $mo = m$, & $on = z$, on aura par les Théorêmes précédents & le dernier Corollaire $mz = g^2$ (en supposant aussi pour la parabole (fig. 42) $dL = g$); donc z devenant infinie, ce qui arrive dans la parabole & l'hyperbole, l'on aura $m = \frac{g^2}{z} = \frac{g^2}{\infty} = 0$, c'est-à-dire qu'à l'infini la courbe intérieure se confond avec l'extérieure, ce qui n'arrive pas dans l'Ellipse, parce que dans cette courbe z n'est jamais $= \infty$.

Avant de passer aux Sections Coniques des genres supérieurs, nous allons faire quelques re-

marques qui serviront à jetter un grand jour sur la théorie des courbes algébriques, dont nous traiterons dans la suite.

89. *Une courbe algébrique est celle dont la nature est exprimée par une équation algébrique, qui contient le rapport qu'il y a entre les ordonnées & les abscisses.* Les ordonnées aussi-bien que les abscisses sont positives ou négatives. En prenant pour positives les abscisses qui, à compter d'un point fixe, tendent vers la droite, les abscisses qui tendent vers la gauche sont négatives & réciproquement. On voit bien que les ordonnées supérieures étant supposées positives, les inférieures seront négatives étant dirigées dans un sens opposé aux premieres, & réciproquement. Il est indifférent de prendre pour positives les abscisses de la droite ou de la gauche, les ordonnées supérieures ou inférieures; mais dès qu'une fois cela est déterminé, il n'y faut plus rien changer, du moins en traitant la même question.

On peut rapporter à l'axe tous les points d'une courbe par des ordonnées paralleles entr'elles & perpendiculaires, ou obliques à cet axe. On peut prendre l'origine des abscisses sur la courbe, comme nous l'avons fait dans la parabole; dans la courbe, comme nous l'avons fait pour le cercle & l'ellipse, en prenant l'origine des abscisses au centre, ou hors de la courbe, ainsi que nous l'avons fait dans l'hyperbole, en prenant l'origine des abscisses au centre, qui est un point situé hors de la courbe. Sur quoi nous remarquerons que l'origine des abscisses ne peut être située sur un point de la courbe que lorsque tous les termes de son équation sont affectés des indéterminées x,

ou y. Quant au contraire l'équation contient un terme entiérement délivré de x & de y, alors l'origine des absciffes ne peut être sur un point de la courbe. Dans les équations $y^2 = a^2 - x^2$, $y^2 = 2ax - x^2$, par exemple, qui appartiennent au cercle, en faisant $x = 0$, on trouve $y = \pm a$ dans la premiere, & $y = 0$ dans la seconde : or y doit être $= 0$, lorsque l'origine des absciffes est sur la courbe; mais y ne doit pas être $= 0$, lorsque cette origine n'est pas sur la courbe; c'est pourquoi dans la premiere équation qui appartient au cercle, en comptant les absciffes depuis le centre & supposant les coordonnées perpendiculaires entr'elles, y n'est pas $= 0$ lorsque $x = 0$.

Pour démontrer cela généralement, soit l'équation d'une courbe algébrique $ax^m + bx^n y^p = dy^l$. En faisant $x = 0$, on a $dy^l = 0$ & $y^l = 0$; donc l'origine des absciffes est sur la courbe, puisque y & x deviennent o en même temps; mais si l'équation de la courbe étoit $ax^m + bx^n y^p + dy^l - g = 0$; en faisant $x = 0$, on auroit $dy^l = g$, ou $y^l = \frac{g}{d}$, ou $y = \sqrt[l]{\frac{g}{d}}$; donc l'origine des absciffes n'est pas sur la courbe, puisque à $x = 0$, ne répond pas $y = 0$.

90. Toute courbe peut être considérée comme polygone, ou comme courbe rigoureuse. La premiere façon de considérer une courbe, ne signifie autre chose sinon que la courbe est la limite du polygone inscrit & circonscrit. Par exemple, si à un même cercle on inscrit & on circonscrit deux polygones réguliers, il est visible qu'en augmentant le nombre des côtés de ces polygones, ils approcheront continuellement de l'égalité avec le cercle, qui est la limite qu'ils ne peuvent passer, de laquelle cependant ils

peuvent approcher tant qu'on voudra. Mais il est bon d'observer que si on a considéré une courbe comme polygone, on ne doit plus la regarder (du moins dans la solution de la même question) comme une courbe rigoureuse ; & si dans la résolution d'un problême on a besoin de considérer deux courbes, on ne doit pas en considérer une comme polygone & l'autre comme courbe rigoureuse, autrement on pourroit tomber dans quelque erreur. Par exemple, menant dans un cercle quelconque les cordes évanouissantes pd, dc, faisant le prolongement do de la corde pd (fig. 44), égal à $dt = pd$, tirant par c & o la ligne oc, & par le point d la tangente dn, on aura $oc = 2nc$: car à cause de $od = dc$, le triangle odc est isocele & l'angle $o =$ l'angle c. D'ailleurs l'angle onc a pour mesure la moitié de l'arc pdc (Géo. 27) ou dc, & l'angle ndc a pour mesure la moitié de de dc ; ainsi $ndc = ndo$; donc la ligne dn divise en deux également l'angle d du triangle isocele odc ; donc dn divise en deux également oc. En effet les triangles odn, ndc sont égaux en tout, puisqu'ils ont deux angles égaux situés sur les côtés égaux dc, do ; donc $nc = on$, & $co = 2\ nc$. Cela posé, supposons un corps p décrivant un petit arc de cercle pdc par le moyen d'une force qui le pousse vers le centre C, & d'une autre force qui au point d retire ce corps de la ligne droite. Si l'on considere le cercle comme un polygone, la corde infiniment petite pd sera l'espace parcouru pendant l'instant précédent, & do sera l'espace que le corps décriroit dans l'instant suivant. C'est pourquoi si l'on mene oc parallele à la direction dC de la force qui agit en d, oc sera l'effet de cette force, c'est-à-dire la quantité dont cette force l'aura rapproché du centre du cercle. En effet, à cause de l'arc dt infiniment petit, l'angle dCo $= toc$, son alterne interne, sera infiniment petit, & l'on pourra regarder le triangle rectangle toc comme isocelle, c'est-à-dire on pourra supposer $to = co$; mais si l'on considere le cercle comme une courbe rigoureuse, la tangente dn sera l'espace que le corps décriroit, tandis que nc exprimera l'effet de la force qui agit en d pour retirer le corps de la ligne droite dn. C'est pourquoi dans la courbe rigoureuse l'effet de cette force exprimé par cn est la moitié de l'effet oc dans la courbe polygone. Donc si on ne veut avoir un effet différent, il faut toujours considérer la courbe de la même maniere, parce qu'alors on a toujours le même rapport dans les effets ; or dans la théorie des forces, c'est à ce rapport

ſeul qu'on fait attention *. De plus ſi on ſuppoſe qu'un corps eſt animé d'une force accélératrice conſtante, qui le pouſſe continuellement vers un centre, & d'une force tangentielle, non accéleratrice, qui le pouſſe ſelon la tangente d'une courbe, il doit parcourir un arc de courbe & non une ligne droite. Ainſi on ne peut alors ſuppoſer, ſans détruire en même temps la ſuppoſition, que le corps parcourre un polygone.

Des Sections Coniques des genres ſupérieurs.

91. Si on a une courbe *am* A (fig. 45.) dans laquelle faiſant la ligne *a* A (que j'appellerai *l'axe*) $= 2a$, l'abſciſſe *a p* comptée du ſommet $= x$, l'ordonnée $pm = y$, on ait $x^m : y^m :: y^n : (Ap)^n = (2a - x)^n$, l'on aura l'équation $y^{m+n} = x^m (2a - x)^n$, qu'on appelle *équation des cercles des genres ſupérieurs*. On les appelle ainſi à cauſe de l'analogie qu'a leur équation avec celle du cercle ordinaire, qui eſt telle qu'en ſuppoſant $m = n = 1$, on aura $y^2 = 2ax - x^2$ équation au cercle vulgaire **. Si on compte les abſciſſes du milieu *c* de l'axe, l'on aura $y^{m+n} = (a-x)^m \times (a+x)^n$; & ſi dans la premiere équation on ſuppoſe $aA = a$, on aura $y^{m+n} = x^m (a-x)^n$. Si dans l'équation $y^{m+n} = x^m (a-x)^n$ on ſuppoſe ſucceſſivement $m = 1, 2, 3, 4, 5$, &c. & $n = 1$, on aura ce qu'on appelle le premier cercle de tous les genres, c'eſt-à-dire $y^2 = ax - x^2$, $y^3 = ax^2 - x^3$, &c. Si on fait $m = 3$ & $n = 2$, on aura $y^5 = x^3 (a-x)^2$ qui exprime le ſecond cercle du cinquieme ordre ou genre, & en

* Cela peut avoir ſon utilité dans la théorie des forces centrales.

** En décrivant ces ſortes de cercles, on verra qu'ils ne ſont pas ronds comme le cercle vulgaire ; mais qu'ils ont différentes formes, ſelon la nature de leur équation.

faisant $m = 2$ & $n = 3$, on aura $y^5 = x^2 (a-x)^3$, troisieme cercle du cinquieme genre. En général le cercle d'un genre quelconque est dit premier, second, troisieme, &c. selon que n (exposant du reste de l'axe) est $= 1, 2, 3$, &c.

REMARQUE. Nous estimons le genre de la ligne par le degré de son équation; mais on peut aussi commencer à compter les genres depuis le cercle ordinaire, qu'on prendra pour le cercle du premier genre; & alors le cercle que nous avons appellé du cinquieme genre sera seulement du quatrieme; de sorte que le cercle de l'équation $y^{m+1} = a x^m - x^{m+1}$ sera seulement du genre $m + 1 - 1 = m$. On voit que cela est indifférent *.

92. Toutes les paraboles peuvent être représentées par l'équation $y^{m+n} = a^m x^n = x^n$, en supposant $a = 1$. Dans toutes ces courbes faisant $x = 0$, on a aussi $y = 0$. De même en supposant x infinie, y est aussi infinie, pourvu qu'elle ne soit pas imaginaire. La diversité des exposants m & n détermine la position des branches d'une parabole. Supposons, pour plus de facilité, que l'on prenne la racine $m + n$ de l'un & l'autre membre de l'équation générale pour avoir $y = \sqrt[m+n]{a^m x^n}$. Si m & n sont des nombres impairs & positifs, $m + n$ sera un nombre pair, & x^n sera une quantité positive; donc y sera la racine d'un degré

* En estimant le genre de la ligne par le degré de l'équation, il n'y aura aucune courbe du premier genre, parce que, comme nous le verrons dans la suite, une équation du premier degré à deux variables x & y, ne représente qu'une ligne droite.

racin

pair d'une quantité positive ; donc y aura deux valeurs, l'une positive, l'autre négative ; & du côté des abscisses positives cb (fig. 46.), la courbe aura deux branches cp, cq, l'une du côté cn des ordonnées positives, l'autre du côté cm des ordonnées négatives. Si on suppose x négatif, x^n sera une quantité négative, & y deviendra imaginaire étant la racine paire d'une quantité négative (on suppose a positif) ; donc du côté ca des x négatives la courbe n'a aucune branche. Si l'équation étoit $y^{m+n} = - a^m x^n$, dans ce cas x étant négatif on auroit $y^{m+n} = a^m x^n$: ainsi la courbe auroit deux branches du côté des abscisses négatives, mais elle n'en auroit aucune du côté des x positives. Supposons maintenant que m étant paire n soit impaire, afin que $m + n$ soit un nombre impair. En supposant x positif, x^n sera aussi positif ; ainsi y sera la racine impaire d'une quantité positive, qui a une seule racine réelle & positive * ; donc la courbe n'a qu'une seule branche cp du côté des abscisses & des ordonnées positives (fig. 47.). Mais en supposant x négatif x^n sera aussi négatif ; donc y sera la racine impaire d'une quantité négative, qui ne peut avoir qu'une seule valeur réelle & négative ; donc la courbe a une autre branche cq dont les abscisses & les ordonnées sont négatives. Dans l'équation $y^{m+n} = - a^m x^n$, aux

* Cela est évident en supposant l'équation $x^3 = c^3$, qui donne $x = \sqrt[3]{c^3} = c$. Les deux autres racines qu'on auroit en divisant $x^3 - c^3 = 0$ par $x - c = 0$ sont imaginaires. En effet le quotient $x^2 + cx + c^2 = 0$, donne $x = - \frac{c}{2} \pm \frac{c}{2} \sqrt{-3}$.

abſciſſes poſitives répondent des ordonnées négatives, & des ordonnées poſitives aux abſciſſes négatives.

Suppoſons enſuite que n étant paire, m ſoit impaire : x étant poſitif, x^n ſera auſſi poſitif, on aura donc comme auparavant une branche cp (fig. 48.) du côté des x & des y poſitifs ; mais parce que toute puiſſance paire d'une quantité négative eſt poſitive, x étant négatif, on aura x^n poſitif ; donc y ſera une racine impaire d'une quantité poſitive ; donc la courbe aura une autre branche cq du côté des abſciſſes négatives & des ordonnées poſitives. Dans l'équation $y^{m+n} = -a^m x^n$ l'une & l'autre branche ſera ſituée du côté cm des ordonnées négatives.

Suppoſons enfin que m & n ſoient paires, $m+n$ ſera paire. Prenant x poſitif ou négatif, x^n ſera toujours poſitif ; donc y ſera la racine paire d'une quantité poſitive ; donc y a deux valeurs, l'une poſitive, l'autre négative ; & cela pour chaque x poſitive ou négative ; donc la courbe (fig. 49.) aura quatre branches, & s'étendra tant du côté des x & des y poſitifs, que du côté des x & y négatifs. Mais la courbe de l'équation $y^{m+n} = -a^m x^n$ ſera dans ce cas entiérement imaginaire.

Remarquons en paſſant que la parabole de l'équation $x^{m+n} = a^m y^n$ eſt la même que celle dont nous venons de parler, avec cette différence ſeulement que les ordonnées de celle-ci ſont paralleles aux abſciſſes de la premiere & les abſciſſes paralleles aux ordonnées. En ſuppoſant $m = 4$ & $n = 1$, on aura $y^5 = a^4 x$, équation à la premiere parabole du cinquieme genre, faiſant $m = 3$, $n = 2$, on aura $y^5 = a^3 x^2$, ſeconde parabole du

cinquieme genre. En général on a les premieres paraboles en faisant $n = 1$, les secondes en faisant n (exposant de l'abscisse) $= 2$, les troisiemes en faisant $n = 3$, &c.

93. Si dans la courbe $a m A$ (fig. 45.) on suppose que $y^2 : ap \times Ap = ax - x^2 :: p : a$, on aura l'équation à l'Ellipse $\frac{a}{p} y^2 = (ax - x^2)$*. Mais si l'on suppose que $y^{m+n} : x^m \times (a - x)^n :: p : a$, on aura $\frac{a}{p} y^{m+n} = x^m (a - x)^n$, équation aux Ellipses des genres supérieurs. Pour avoir la premiere Ellipse du cinquieme genre, par exemple, on fera $n = 1$; pour avoir la seconde, on fera $n = 2$, &c.

94. Dans l'Hyperbole en appellant le premier axe a, le parametre p, on a $\frac{a}{p} y^2 = ax + x^2$ **. Mais si on fait $y^{m+n} : x^m \times (a + x)^n :: a : p$, d'où l'on tire $\frac{a}{p} y^{m+n} = x^m (a + x)^n$, on aura l'équation aux Hyperboles des genres supérieurs. Les premieres, secondes, troisiemes, &c. Hyperboles du septieme genre, par exemple, se déterminent en faisant $n = 1, 2, 3$, &c.

REMARQUE. Si l'exposant $m + n$ de y est un nombre impair, y ne peut avoir qu'une racine réelle, & seulement deux racines réelles si cet ex-

* En divisant par a & multipliant par p, on trouvera $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; donc en mettant $2a$ au lieu de a, auroit $y^2 = px - \frac{pa^2}{2a}$, équation trouvée ci-dessus (n° 31).

** On suppose ici l'axe $= a$ & le parametre $= p$.

posant est pair ; donc dans le premier cas, à chaque abscisse il ne peut répondre qu'une ordonnée, & deux dans le second cas ; donc dans le premier cas il n'y a qu'une seule branche du même côté de l'axe ; mais il y en a deux dans le second cas. Cette Remarque a également lieu pour les cercles, ellipses & paraboles des genres supérieurs. On va voir aussi que c'est la même chose pour les Hyperboles des genres supérieurs rapportées aux asymptotes.

95. Si on fait $x^m : a^m :: a^n : y^n$, on aura $x^m y^n = a^{m+n}$, équation aux Hyperboles des genres supérieurs rapportées à leurs asymptotes *. De cette équation il est aisé de tirer $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$. Si on suppose x infiniment petit, on a $y^n = \infty$, & $y = \sqrt[n]{\infty}$. Mais en supposant $x = \infty$, on a $y^n = 0$, & $y = 0$. De l'équation $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$, on tire $y = \sqrt[n]{\frac{a^{m+n}}{x^m}}$, équation qui fournit les conclusions suivantes. Si m & n sont impaires, ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire, en supposant x positif, x^m sera aussi positif ; donc y sera une racine impaire d'une quantité positive ; donc y n'a qu'une seule valeur réelle. C'est pourquoi la courbe aura une branche p (fig. 50) du côté des abscisses & des ordonnées positives. Si x est négatif, x^m le sera aussi, & y sera la racine impaire d'une quan-

* On peut aussi faire $x^n : a^n :: a^{m-n} : y^{m-n}$; d'où l'on tire $a^m = y^{m-n} x^n$ autre équation aux Hyperboles, qui donne les mêmes résultats que la premiere.

tité négative, racine qui n'a qu'une ſeule valeur réelle, mais négative; donc il en réſultera une autre branche q du côté des x & des y négatifs.

Si n eſt impaire & m paire, prenant x poſitif ou négatif, x^m ſera toujours poſitif; donc y ſera la racine impaire d'une quantité poſitive, qui n'a qu'une valeur réelle & poſitive; donc la courbe (fig. 51.) ſera compoſée de deux branches p & q, dont la premiere a les abſciſſes & les ordonnées poſitives, la ſeconde ayant les abſciſſes négatives & les ordonnées poſitives.

Si n eſt paire & m impaire, x étant poſitif, x^m le ſera auſſi, & y ſera la racine paire d'une quantité poſitive, qui a deux valeurs, l'une poſitive, l'autre négative; donc la courbe aura deux branches, l'une p (fig. 52.) du côté des ordonnées poſitives, l'autre q du côté des y négatifs. Si x eſt négatif, x^m le ſera auſſi; donc y racine paire d'une quantité négative ſera imaginaire; donc la courbe n'a aucune branche du côté des x négatifs. Dans tous les cas dont nous venons de parler, ſi l'équation étoit $x^m y^n = -a^{m+n}$, il en réſulteroit les mêmes Hyperboles en changeant les x & les y poſitifs en négatifs & réciproquement.

Enfin ſuppoſant que m & n ſont des nombres pairs, pour x poſitif ou négatif, on aura toujours x^m poſitif, & y racine paire d'une quantité poſitive aura deux valeurs, l'une poſitive & l'autre négative correſpondantes à chaque x poſitif ou négatif; donc la courbe (fig. 53.) eſt compoſée de quatre branches p, g, q, r qui s'étendent tant du côté des x & y poſitifs, que du côté des x & y négatifs. Mais les branches de la courbe

dont l'équation feroit $x^m y^n = - a^{m+n}$ font dans ce cas imaginaires.

REMARQUE. Les Hyperboles dont nous venons de parler dans ce dernier cas, ne font autre chofe que les Hyperboles des cas précédents unies enfemble. Car en prenant la racine quarrée jufqu'à ce que l'un des expofants de x ou de y, ou tous les deux foient impairs, on aura une équation, dans laquelle, à caufe du double figne $\pm$, il fe préfentera deux Hyperboles qui appartiendront à quelqu'un des cas ci-deffus. Il eft vifible qu'il faut raifonner de même par rapport à l'équation à la parabole $y^{m+n} = a^m x^n$, lorfque m & n font des nombres pairs.

96. Difons un mot des Courbes, qu'on nomme *Paraboloïdes*. On appelle ainfi toutes les courbes dans lefquelles l'ordonnée y multipliée par une conftante $= 1$, ou différente de l'unité, eft égale à une fonction rationelle & entiere de x. Telle eft la courbe de l'équation $a^2 y = x^3 + bx^2 + d^3$. L'équation générale des paraboloïdes eft $a^{m-1} y = x^m + b x^{m-1} + a c x^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-1} k$.

Parce que y ne monte qu'au premier degré, il eft évident que fa valeur eft toujours réelle, foit qu'on fuppofe x pofitif ou négatif; donc la courbe (fig. 54.) n'eft point interrompue; mais elle s'étend à l'infini du côté des x pofitifs & du côté des x négatifs. Si l'on fuppofe x infini foit pofitif, foit négatif, en négligeant tous les termes, qui, en comparaifon de x^m font regardés comme o, on trouve l'équation $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$. Dans cette même fuppofition de $x = \infty$, fi m eft impair y fera pofitif fi x eft pofitif, & négatif fi x eft

négatif. Mais une courbe continue, dans laquelle y doit passer du positif au négatif, doit nécessairement couper la ligne des abscisses ; or elle la coupera ou en un, ou en trois, ou en cinq &c. points : ensorte que le nombre des intersections sera impair. En effet supposons que la courbe est passée des y positifs aux négatifs en coupant une fois la courbe, si elle repasse du côté des y positifs en coupant une seconde fois la courbe, elle ne peut repasser du côté des y négatifs qu'en coupant trois fois la courbe, & ainsi de suite ; donc &c. si m est paire x étant infini, positif ou négatif, x^m sera toujours positif aussi-bien que y ; or une courbe continue, dans laquelle y répondant à un x infini, positif ou négatif, est toujours positif, ne coupera point du tout la ligne des abscisses, ou la coupera en deux, en quatre, en six &c. points, en sorte que le nombre des intersections sera pair. En effet en passant d'abord des y positifs aux négatifs, il doit se faire une intersection, & pour repasser aux y positifs il doit s'en faire une seconde, & ainsi de suite. Si dans le dernier terme k est négatif, en supposant $x = o$, on aura $y = -k$; donc dans ce cas il y aura au moins deux intersections. En effet x étant positif & d'une certaine grandeur, y le sera aussi évidemment ; mais x étant $= o$, y devient négatif ; donc la courbe coupe une fois la ligne des abscisses avant que x devienne o, & comme y est positif lorsque x négatif est infini, la courbe repasse nécessairement du côté des y positifs ; donc &c.

97. COROLLAIRE I. Il suit de ce que nous venons

de dire, que toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle, & si elle en a plusieurs leur nombre est impair. Car supposons tous les termes de l'équation égaux à y, en concevant décrite la courbe que représente cette équation & dont ab soit la ligne des abscisses, il est visible que les racines réelles de cette équation se trouveront en faisant $y = o$ *; or y est o au point où la courbe coupe la ligne des abscisses; donc les abscisses comprises entre l'origine & les points d'intersection sont les racines réelles de l'équation. Mais on a prouvé qu'il y a au moins un point d'intersection, & que quand il y en a plusieurs ils sont toujours en nombre impair; donc une équation déterminée ** d'un degré impair a au moins une racine réelle, & si elle en a plusieurs elles sont toujours en nombre impair. Si l'intersection avoit lieu à l'origine des abscisses, il y auroit une racine $= o$, & le dernier terme manqueroit. Delà on peut conclure que les racines imaginaires sont toujours en nombre pair dans une telle équation. Car si d'un nombre impair de racines vous ôtez un nombre impair de racines réelles, il restera un nombre pair de racines imaginaires.

98. COROLLAIRE II. Les équations de degré pair n'ont aucune racine réelle, ou en ont toujours un nombre pair. Car supposant la somme des termes d'une équation de degré pair égale à y, la courbe doit couper la ligne a B (fig. 55.) des abscisses

* C'est la même chose que de faire la somme de tous les termes d'une équation égale à o.

** Une équation déterminée est celle qui ne contient qu'une inconnue.

dans un nombre pair de points, ou ne la point couper du tout, ainsi que nous l'avons déja prouvé. Mais si le dernier terme de l'équation est négatif, la Courbe coupant alors la ligne des abscisses au moins en deux points, l'équation déterminée aura au moins deux racines réelles; & en général il y aura autant de racines réelles qu'il y aura de points d'interfection; donc il y aura un nombre pair de racines réelles; donc les racines restantes, s'il y en a, seront en nombre pair & imaginaires.

99. COROLLAIRE III. Il suit des deux Corollaires précédents, que dans toute équation rationelle & déterminée, les racines imaginaires, s'il y en a, sont toujours en nombre pair, ce qu'on sait d'ailleurs.

De quelques usages des Sections Coniques.

100. On fait usage de la Parabole & de l'Ellipse dans la construction des vaisseaux. Lorsqu'on veut donner beaucoup de façons à un vaisseau, on se sert de la Parabole pour placer le *maître couple* (c'est le plus grand couple du vaisseau). Ayant décrit un rectangle $mnba$ (fig. 56.), dont la longueur mn est égale à celle du *baux*, & la hauteur ma est le *creux du navire* (c'est-à-dire, est égale à sa profondeur, à compter depuis le *baux*); de part & d'autre du milieu q de ab, on prend les lignes qg, qh égales au *demi-plat de la varangue* (les varangues sont les pieces qui portent immédiatement sur la quille, le demi-plat est leur longueur horisontale compté à droite ou à gauche de la quille en allant vers b ou vers a, & joignant les deux demi-longueurs ensemble, l'on aura la longueur entiere); & ayant mené go, ho perpendiculaires à ba & égales chacune à l'*acculement* (l'acculement est la distance de l'extrémité o de la varangue à la ligne horisontale ab), on décrit deux paraboles égales mo, no, dont l'axe commun est la ligne mn, & qui doivent passer par les points o & o. Pour pouvoir décrire ces pa-

raboles, il suffit de trouver leur parametre ; or en prolongeant $h\,o$ jusques en l, & prenant une ligne troisieme proportionnelle à l'abscisse $n\,l$ & à l'ordonnée $o\,l$, on aura le parametre cherché (19.). Le parametre p étant connu avec les sommets m & n, il sera aisé de tracer ces paraboles. Pour tracer les demi-varangues $q\,o$, ayant tiré la ligne droite $q\,i\,o$, on la partagera en i en deux également ; on partagera aussi $i\,o$ en deux parties égales en r, & par le milieu r on lui menera la perpendiculaire $r\,k$ jusqu'à la rencontre de la ligne $o\,x$ déterminée, en faisant $l\,x = \frac{p}{2}$, ce qui fait voir que $x\,o$ est la normale de la parabole par rapport au point o (12.). Du point k comme centre, & de l'intervalle $k\,o$ on décrira un petit arc de cercle $o\,i$, qui touchera évidemment la parabole en o, puisque le centre de ce cercle se trouve sur un point k de la perpendiculaire à la tangente en o de la parabole, ce qui fait que cette tangente appartient à la parabole & à l'arc $o\,i$. Ayant tiré $k\,i$ & fait le prolongement $i\,t = i\,k$, du point t comme centre & de l'intervalle $t\,i$, on décrira un petit arc $i\,q$ * concave du côté de t, lequel touchera l'arc $i\,o$ en i, puisque ces deux arcs ayant leurs centres sur la même ligne, leurs rayons doivent être perpendiculaires à une tangente commune qu'on meneroit par le point i à l'un des deux arcs. On s'y prendra de même pour achever l'autre moitié ; mais on se sert de l'Ellipse lorsqu'on veut donner beaucoup de capacité à un vaisseau.

101. Supposant que $m\,n$ (fig 57.) représente la demi largeur du vaisseau **, m M la ligne du creux, M q le demi-plat de la varangue, M b l'acculement. Prenez $c\,s = m\,n$, sur $c\,s$ comme côté, construisez le quarré $c\,x\,y\,s$, du point c & du rayon $c\,s$ décrivez le quart de cercle $s\,o\,x$, partagez $c\,x$ en un grand nombre de parties égales, par les points de divi-

* Puisque $i\,k = i\,t = k\,o$, il est visible que le cercle décrit du point t avec le rayon $i\,t$, doit passer par les extrémités i & q de la ligne $i\,q$, comme l'arc de cercle décrit du point k avec le rayon $k\,i$ passe par les extrémités i & o de la ligne $i\,o = i\,q$.

** Nous l'appellons ainsi, quoique la vraie demi-largeur $q\,g$ soit plus grande de la quantité q M.

sion tirez des paralleles à xy, divisez $mb = ni$ en un même nombre de parties égales, portez chaque oh sur la division correspondante en prenant $OH = oh$, & vous aurez une partie nb de la moitié du maître couple. Pour avoir la partie inférieure tirez la ligne bq, sur le milieu z de laquelle vous menerez la perpendiculaire kz jusqu'à la rencontre en k du prolongement de mb. Du point k comme centre avec le rayon $kb = qk$, vous décrirez l'arc bq pour avoir la moitié nbq du maître couple, l'autre moitié se construit de même. Il nous reste à faire voir que la courbe nOb est elliptique. Soit supposée mn le petit demi-axe, mb le demi-grand axe d'une Ellipse. Par construction les lignes nH, ni sont dans le rapport de $sh : sy$; puisque les points h & H sont supposés situés sur des divisions correspondantes; donc on a $sy = cx = mn : sh = po :: ni = mb : nH = uO$; donc $mb : uO :: cx : po$. Ou (*alternando*) $mb : cx :: uO : po$; c'est-à-dire que les ordonnées à la courbe nOb & au quart de cercle sox sont toujours dans le rapport constant du demi-axe mb au rayon du cercle cx, ou du demi-grand axe mb au petit demi-axe nm; donc la courbe nOb appartient à une Ellipse *. De plus b étant l'extrémité du demi-grand axe, la ligne bi perpendiculaire sur mb est évidemment tangente de l'Ellipse; or elle est aussi tangente de l'arc circulaire bq, puisqu'elle est perpendiculaire sur l'extrêmité b du rayon kb de cet arc; donc cet arc touche l'Ellipse en b.

102. PROBLÊME. *Supposant que le ressort d'une montre soit tel qu'en se débandant sa force décroisse comme les lignes mp, no, sh &c. (fig. 58.), ou comme les éléments du triangle mpi, on demande la figure que doit avoir la fusée zty pour que le mouvement de la montre soit toujours uniforme.* Soit mp la force du ressort au commencement de son débandement, sh sa force, lorsque la fusée est entiérement devidée, mi l'axe de la courbe cherchée. Soit $= y$ l'ordonnée nt qui représente le levier, à l'extré-

* Car en faisant $mb = a$, $cx = b$, $uO = y$, $cp = mu = x$, $po = z$, l'on aura $aa : bb :: y^2 : z^2$. Mais par la propriété du cercle, $z^2 = bb - xx$; donc $y^2 = \frac{aa}{bb}(bb - xx)$.

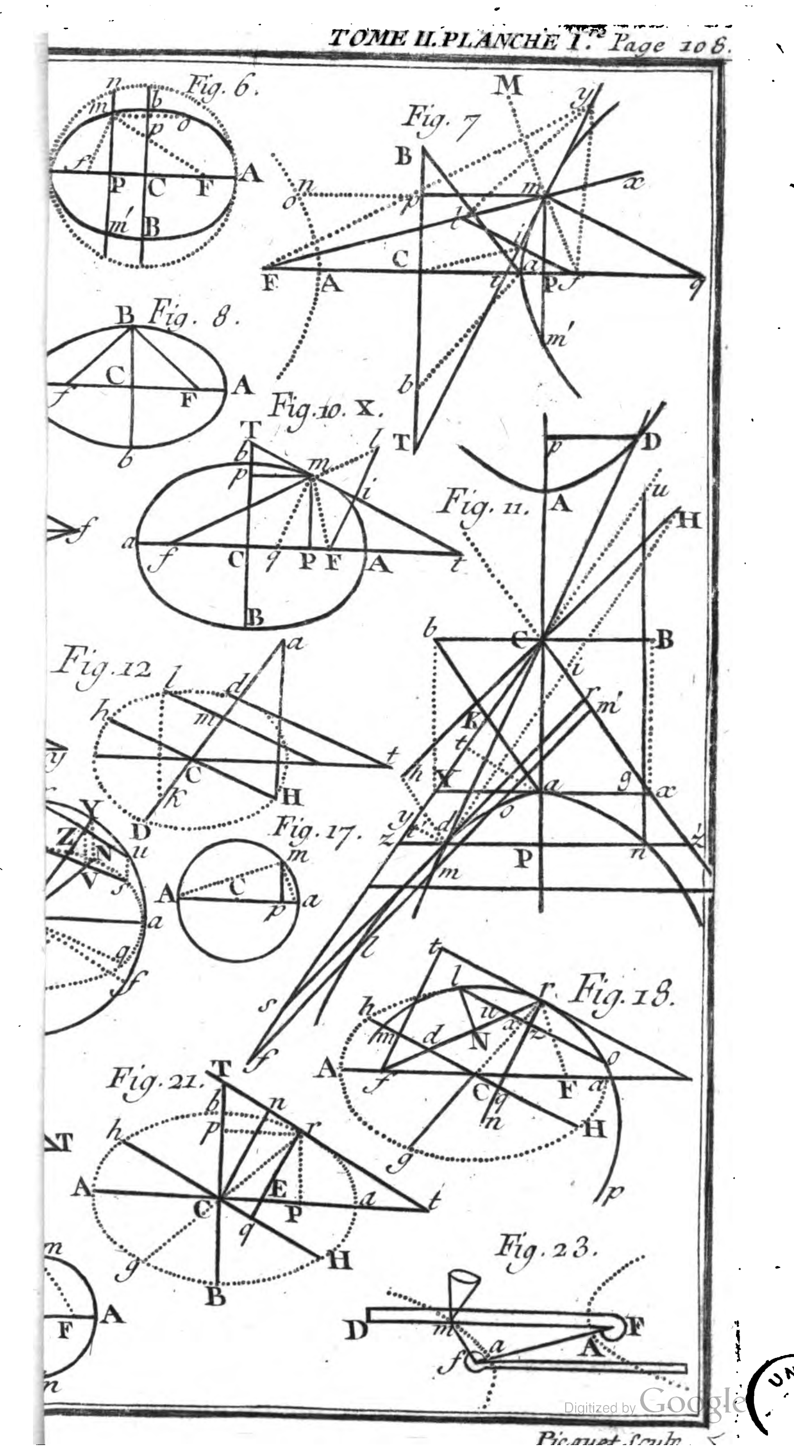
mité duquel agit la force no. Parce que le produit de la force $no \times y$ doit être constant *, soit ce produit $= a.d$. En supposant $si = b$ & $hs = d$, les triangles semblables sih, ino donnent $is : sh :: in : no$, ou (en faisant $sn = p$) $b : d :: b + p : no = \frac{d \times (b + p)}{b}$; mais $no \times y = a.d$; donc $no = \frac{a.d}{y} = \frac{d.(b+p)}{b}$; donc $a.b.d = d \times (b+p) \times y$, ou $\frac{a.d.b}{d} = (b+p) \times y$, ou $ab = c^2 = x.y$, en supposant c moyenne proportionnelle entre a & b, & $x = b + p$; or cette équation appartient à l'Hyperbole rapportée à ses asymptotes; donc, dans cette supposition, la fusée de la montre doit avoir la figure d'un hyperboloïde formé par la révolution d'une Hyperbole autour de son asymptote.

La Parabole & l'Ellipse sont d'un grand usage dans l'Astronomie pour calculer le mouvement des Cometes & des Planetes. Dans la seconde édition de nos Institutions Mathématiques, nous avons fait des applications très-intéressantes de ces courbes à la Théorie des Forces Centrales, à l'Astronomie Physique, à la Dioptrique & Catoptrique, auxquelles nos Lecteurs pourront avoir recours, s'ils le jugent à propos.

DES COURBES ALGÉBRIQUES.

1. NOUS avons déja dit dans les Sections Coniques (89.) qu'une Courbe Algébrique est une Courbe exprimée par une équation algébrique, qui contient le rapport qu'il y a entre les ordonnées & les abscisses. Les *lignes algébriques* sont dites du premier, second, troisieme &c. ordre, selon que leur équation est du premier, second, troisieme &c. dégré. Ainsi l'équation au cercle $y^2 =$

* Afin que le mouvement des roues soit uniforme.



Picquet Sculp.

Fig. 28.

Fig. 31.

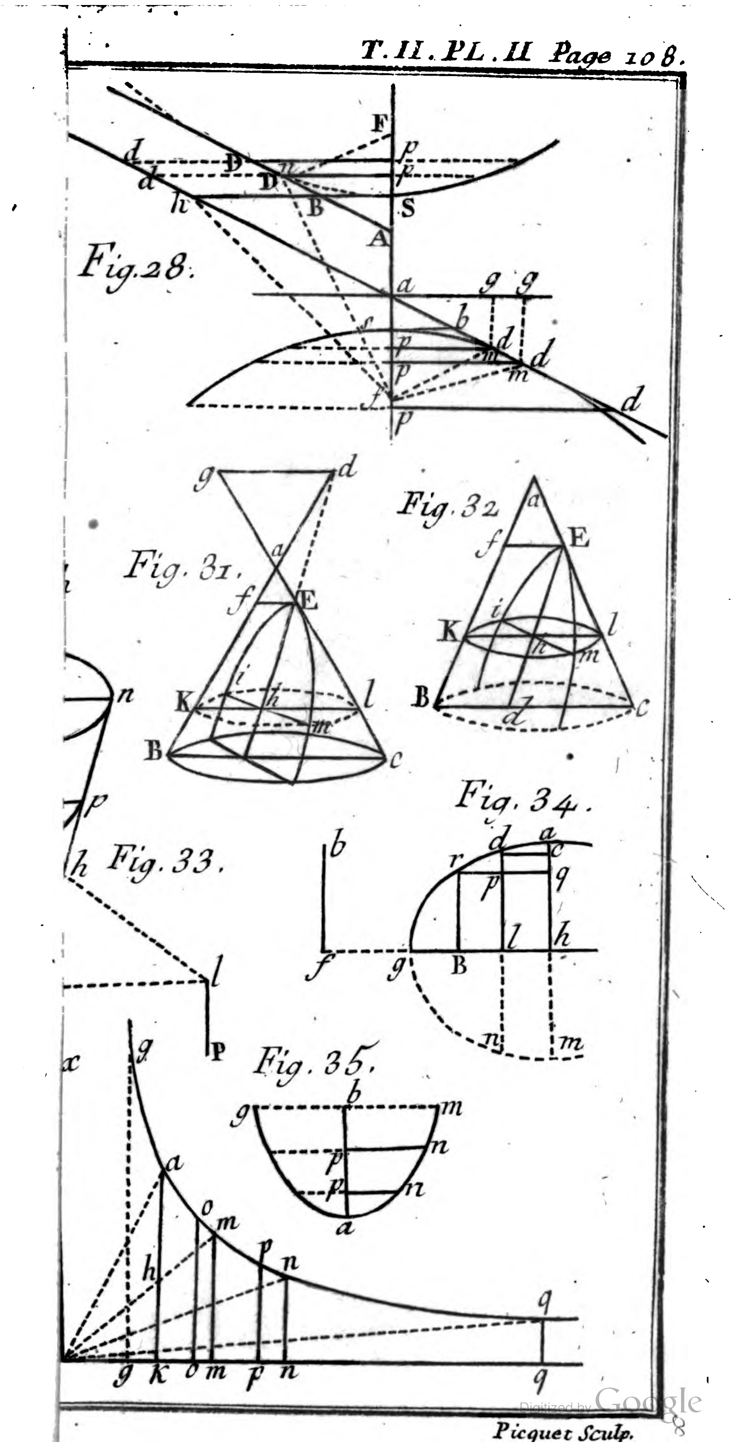
Fig. 32

Fig. 33.

Fig. 34.

Fig. 35.

Picquet Sculp.



Picquet Sculp.

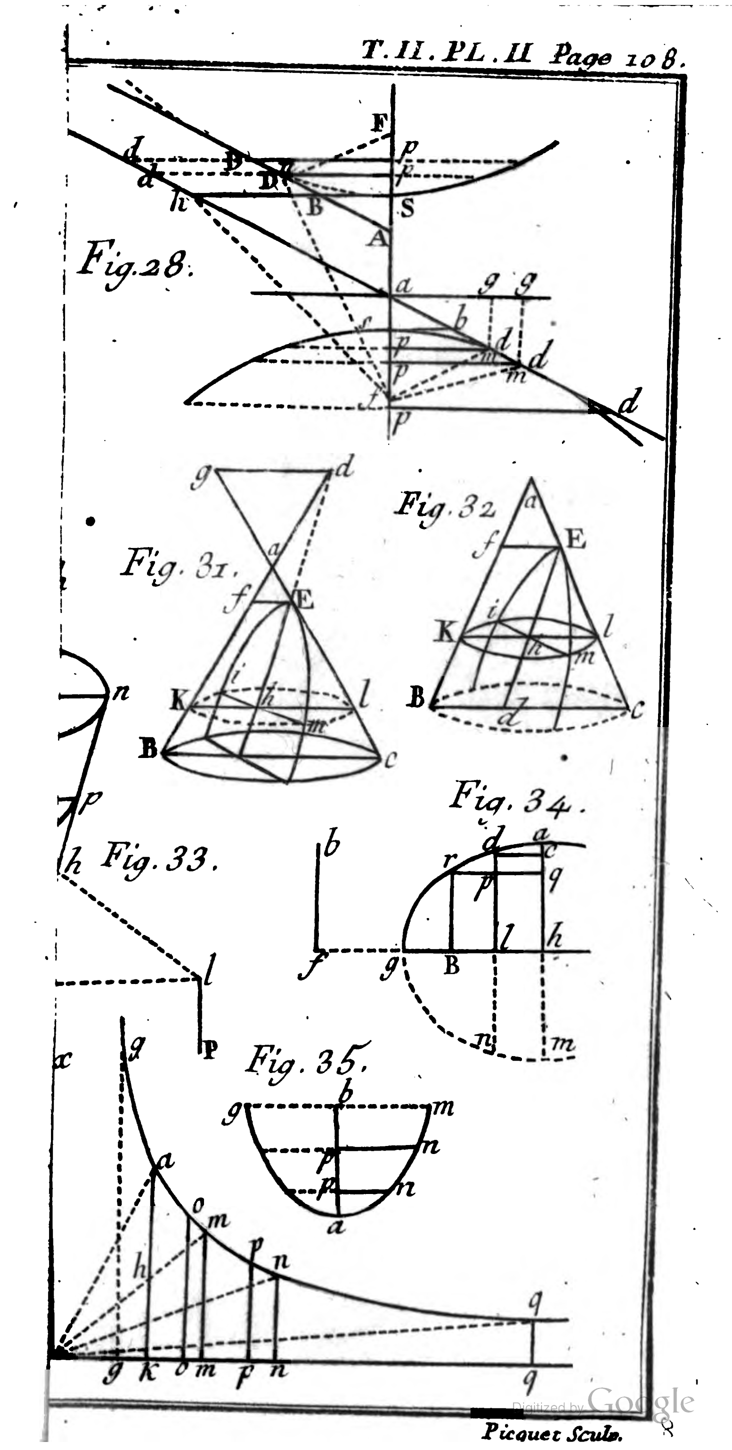


Fig. 28.
Fig. 31.
Fig. 32
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Picquet Sculp.

Fig. 40

Fig. 41.

Fig. 46.

Fig. 47.

Fig. 50.

Fig. 51.

Fig. 57.

Fig. 58.

Licquet Sculpsit



Fig. 40

Fig. 41.

Fig. 46.

Fig. 47.

50.

Fig. 51.

Fig. 57.

Fig. 58.

Licquet Sculpsit

$a^2 - x^2$, ou en tranſpoſant, $y^2 + x^2 - a^2 = 0$ eſt du ſecond degré, & le cercle eſt une ligne algébrique du ſecond ordre. L'équation $y^3 = ax^2$, ou $y^3 - ax^2 = 0$ repréſente une ligne du troiſieme ordre. En général une ligne d'un ordre quelconque peut être repréſentée par l'équation $fy^m + gx^n + hy^r x^s + l = 0$, en prenant pour fy^m tous les termes qui ne contiennent qu'une ſeule puiſſance de y, pour gx^n tous ceux qui ne contiennent qu'une ſeule puiſſance de x, pour $hy^r x^s$ tous ceux qui contiennent à la fois x & y. Mais l repréſentera le terme conſtant ou les termes conſtants s'il y en a plus d'un, & l'on fera $l = 0$, s'il n'y a point de terme conſtant dans l'équation. Ainſi s'il s'agit de l'équation $ay^2 + cy + bx + dx^3 + pxy + qxy^2 + g = 0$, fy^m repréſentera ay^2 & cy, gx^n repréſentera bx & dx^3, $hy^r x^s$ repréſentera d'abord pxy, & enſuite qxy^2, enfin l'on fera $l = g$.

2. PROBLÊME. *Etant donnée l'équation d'une courbe algébrique (qu'on appelle auſſi géométrique), décrire cette courbe* (fig. 1.). Suppoſons les ordonnées perpendiculaires aux abſciſſes, & donnons aux abſciſſes x pluſieurs valeurs ſucceſſives depuis o juſqu'à ∞, & pour chacune de ces valeurs cherchant les valeurs correſpondantes de y, on menera aux points correſpondants les ordonnées pm poſitives ou PM négatives, & par les points m, M &c. on tracera la courbe mcM. Par exemple, pour décrire la courbe de l'équation $y^3 - ax^2 = 0$, ſuppoſant $x = 0$, on aura $y = 0$; donc prenant le point c pour l'origine des abſciſſes, la courbe paſſera par ce point. Faiſant enſuite $x = 1$, on aura $y^3 = a$ & $y = \sqrt[3]{a}$; & ſuppoſant $a = \frac{1}{8}$, on

aura $y = \frac{1}{2}$. * Prenant donc $ca = x = 1$, on menera l'ordonnée $ba = \frac{1}{2}$, & le point b appartiendra à la courbe. Faisant $x = 2$, on aura $y^3 = 4a = \frac{1}{2}$, & $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; prenant donc $cp = x = 2$, on prendra $pm = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (ce qu'on peut faire du moins par approximation, en se servant des décimales). Faisant ensuite successivement $x = 3, 4$, &c. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, &c. on cherchera les valeurs correspondantes de y. Faisant de même $x = -1, = -2$, &c. on aura les valeurs de y correspondantes aux abscisses négatives. Faisant passer une courbe par les extrémités de tous les y trouvés, on aura la courbe Mcm d'autant plus exactement qu'on aura pris les y plus proches l'un de l'autre, & qu'on aura trouvé des valeurs plus exactes de ces y.

Exemple second : soit l'équation de la courbe, $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$. Je remarque d'abord qu'en prenant ba (fig. 2.) pour l'axe & a pour l'origine des abscisses, la courbe ne doit avoir aucune branche du côté des x négatifs ; car en supposant x négatif l'on aura $y = \sqrt{-x} \pm \sqrt[4]{-x^3}$ quantité imaginaire. On ne peut pas non-plus prendre le radical $\sqrt{x}$ en $-$, car alors $\sqrt[4]{x^3}$ deviendroit $\sqrt{(-x.\sqrt{x})}$, quantité imaginaire. Supposant maintenant $x = 1$, nous aurons $y = 1 \pm 1$, ou $y = 2$ & $y = 0$; donc en prenant $ab = 1$, une

* a peut désigner $\frac{1}{8}$ de pied ou de pouce, &c. cela est arbitraire. Si a désigne $\frac{1}{8}$ de pied, l'unité de ligne désignera 1 pied, & si a désigne $\frac{1}{8}$ de pouce, l'unité de ligne désignera 1 pouce.

des branches am de la courbe rencontrera l'axe en b, l'autre branche an passera par le point n, extrêmité de l'ordonnée $bn = 2$. Si $x = aP = \frac{9}{10}$, l'on aura (par approximation) $y = 1.741$, & $y = 0.047$. Le point N de la plus grande ordonnée appartiendra à la branche an, & le point m de la plus petite ordonnée Pm, appartiendra à la branche amb, & parce que entre a & b les deux valeurs de y sont toujours positives, les deux branches am, an sont situées au-dessus de l'axe. Mais en supposant $x > 1$, on trouve pour y deux valeurs, l'une positive & l'autre négative; de sorte que la branche an reste toujours au-dessus de l'axe & la branche amb descend au-dessous du même axe. Si l'on calcule les valeurs de y en décimales, on trouvera autant de points de la courbe que l'on voudra; & cela d'autant plus exactement qu'on poussera l'approximation plus loin. Si on suppose $x = \infty$, on a $y = \infty^{\frac{1}{2}} \pm \infty^{\frac{3}{4}} = \pm \infty^{\frac{3}{4}}$ (parce que le premier terme disparoît devant le second); donc les deux branches s'éloignent infiniment de l'axe des abscisses, l'une en dessus, l'autre en dessous. On peut remarquer en passant que les deux branches en partant du point a tournent leur concavité du même côté, de sorte que la convexité de l'une est tournée du côté de la concavité de l'autre.

Si on avoit l'équation $x^3 - x + y + y^3 = 0$, on supposeroit successivement $x = 1, 2, 3$, &c. -1, -2, &c. & l'on résoudroit l'équation du troisieme degré qui résulteroit de ces suppositions. Les racines feroient connoître les valeurs correspondantes de y. Si l'on ne pouvoit résoudre l'équation que

par approximation, on n'auroit que des valeurs approchées de y *.

3. PROBLÊME. *Etant données plusieurs quantités qui dérivent d'un égal nombre d'autres quantités, trouver la loi (du moins approchée) que suivent ces quantités.* Par exemple, étant données les quantités ab, hc, fg (fig. 3.) qui dérivent des quantités da, dc, df par une loi inconnue, trouver cette loi (du moins par approximation). Regardant les quantités ba, ch, &c. comme les ordonnées & les quantités da, dc, &c. comme les abscisses d'une courbe qui passeroit par les points b, h, g, on supposera $y = a + bx + cx^2$, en prenant autant de termes que l'on a de points donnés. Les quantités a, b, c sont constantes, mais indéterminées. Pour les déterminer on supposera que x étant $= da$, y est $= ba$, ce qui donnera une équation dans laquelle on aura trois inconnues a, b & c. Supposant en second lieu qu'ayant $x = dc$, l'on a $y = ch$, on aura une nouvelle équation, dans laquelle il y aura les mêmes inconnues a, b, c. Enfin en supposant que x valant df, y est $= fg$, on parviendra à une troisieme équation qui aura la même condition. L'on aura donc trois équations & trois inconnues a, b, c; donc on pourra aisément trouver les valeurs de ces trois inconnues. Substituant ces valeurs dans l'équation $y = a + bx + cx^2$, on aura la loi cherchée $y = a' + b'x + c'x^2$ (a', b', c' désignent les valeurs de a, b, c, données par les équations dont nous venons de parler). Maintenant pour connoître la quantité pm qui répond à la quantité dp, à la place de x on substituera la valeur connue de dp dans la formule que nous venons de trouver, & pm ou y deviendra connue. Cette méthode s'appelle *la méthode des interpolations*, qui est d'un grand usage dans l'Astronomie. Supposons, par exemple, qu'on ait trouvé $a' = \frac{3}{4}$, $b' = 1$, & $c' = \frac{1}{2}$; & qu'on demande la valeur de $y = pm$, en supposant $x = 1 + \frac{1}{2}$, on aura $y = \frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} =$

* Si l'angle des coordonnées étoit donné de 30°, par exemple, on meneroit les ordonnées paralleles entr'elles & faisant avec l'axe des x un angle de 30°.

$3 + \frac{3}{8}$. Mais si l'on avoit $y = d = ns$ pour avoir $x = dn$, on résoudroit l'équation $c' x^2 + b' x + a' = d$.

Du changement des Coordonnées x & y.

4. Soit une courbe cbm (fig. 4.) dans laquelle le point a soit supposé l'origine, & ap l'axe des x, ensorte que $ap = x$. Si on veut changer cette origine de maniere qu'on veuille compter les abscisses depuis le point d sur le même axe, l'ordonnée $ab = y$ restera évidemment la même qu'auparavant. Supposons la nouvelle abscisse $dp = t$, & $ad = f$. Dans ce cas on aura $ap = x = t - f$. C'est pourquoi si dans l'équation de la courbe on substitue à la place de x & de ses puissances $t - f$ & ses puissances, on aura une équation entre t & y qui représentera la même courbe, avec cette différence que l'origine des abscisses sera en d, au lieu qu'elle se trouvoit ci-devant en a. Si le point d étoit situé en D à la droite du point a, f deviendroit négative, & l'on auroit $x = t + f$. L'abscisse Dp seroit négative lorsque le point p tomberoit à la gauche du point D, & positive dans le cas contraire. Supposons maintenant qu'ayant tiré la ligne sq parallele à l'axe * cp, on veuille prendre le point g de cette ligne pour l'origine des abscisses. Appellant les nouvelles abscisses gq (t), & les ordonnées mq (u), si on suppose $ha = gn = f$, $kg = pq = g$, on aura $gq = gn + nq = ha + ap = f + x = t$, & $x = t - f$, $mp = mq - pq = u - g = y$ (si la ligne sq étoit située

* Nous entendons ici par axe des abscisses la ligne sur laquelle on prend les abscisses, soit que les ordonnées soient perpendiculaires ou obliques à cette ligne.

au-dessus de da, l'on auroit $y = u + g$); c'est pourquoi si dans l'équation à la courbe, à la place de x on substitue $t - f$, & $u - g$ au lieu de y, on aura une équation entre u & t qui représentera la même courbe; mais dont l'axe des abscisses sera sq, & l'origine des abscisses le point g.

5. PROBLÊME. *Etant donnée l'équation à une courbe* Am, *dont les coordonnées* x, y *sont perpendiculaires l'une à l'autre, trouver une équation qui exprime cette même courbe rapportée à un axe* Rt *oblique au premier* (fig. 5.), *en supposant les ordonnées* mt *obliques ou perpendiculaires à cet axe.* Soit supposé le point d, la nouvelle origine des abscisses, l'angle Rtm des nouvelles coordonnées $= h$, son sinus $= p$, & son cosinus $= q$. Du point d tirant dg parallele à mpo, nous ferons $ag = f$, $dg = g = po$. Ayant mené do parallele au premier axe, soit $= m$ le sinus de l'angle odt, son cosinus $= n$. Menons mq perpendiculaire sur dt, & faisons $dq = t$ & $qm = u$. Faisons de plus les coordonnées obliques $dt = r$, $tm = s$. Tirons enfin les lignes oP, oQ perpendiculaires, l'une sur mq, l'autre sur dt. Cela posé, le triangle rectangle mqt donne le rayon R (que nous supposerons $= 1$, à quoi l'on doit faire attention) : cos. mtq (q) :: mt (s) : $qt = \frac{sq}{R} = \frac{sq}{1} = sq$; donc $dq = t = dt - qt = r - s.q$. Le même triangle donne sinus total (1) : sin. mtq (p) :: $s : u = p.s$. De plus le triangle rectangle moQ donne $1 : y + g :: n : m$Q* $= n.y + n.g$.

* A cause de $mo = mp + po = y + g$, & de l'angle poQ $= qid$. En effet les triangles rectangles i[illegible] idq

Le même triangle donne $1 : y + g$ :: sin. Qmo ou sin. idq (m) : $Qo = qP = y.m + g.m$. Le triangle rectangle odP donne $1 : m$ :: $do = ga + ap = f + x : oP = mf + mx$. Le même triangle donne $1 : n$ :: do $(f + x) : dP = n.x + n.f$; donc $dq = t = dP - qP = nf + nx - gm - ym$, $qm = u = mQ + qQ = mQ + oP = mf + mx + ng + ny$. Lorsque l'angle dtm devra être droit, on aura $p = 1$ & $q = 0$.

De ces équations on peut tirer facilement les valeurs de x & y. En effet laissant x seul dans un membre sans le délivrer de son coefficient, la premiere équation donne $nx = t + my + gm - nf$, la seconde donne $mx = u - mf - ny - ng$. Faisant $= a$ dans la premiere & $= b$ dans la seconde, toutes les quantités du second membre qui ne sont pas affectées de y, on a les deux équations $\begin{matrix} nx = my + a \\ mx = -ny + b. \end{matrix}$ Multipliant la premiere par m & la seconde par n on aura ces deux autres équations $\begin{matrix} mnx = mmy + ma \\ mnx = -nny + nb. \end{matrix}$ Otant la seconde de la premiere, réduisant & transposant, il vient $(m^2 + n^2) \times y = nb - ma$, & divisant par $m^2 + n^2 = 1$ *, l'on trouve $y = nb - ma = nu - mt - g$

ont leurs angles en i opposés au sommet, & par conséquent égaux, ils ont de plus chacun un angle droit; donc l'angle d de l'un est égal à l'angle m de l'autre; donc les triangles rectangles diq, moQ ayant leurs angles en d & m égaux, ont les angles moQ, diq égaux; donc moQ est complément de qdo.

* Parce que dans un triangle rectangle dont l'hypothénuse $= 1$, le sinus d'un des angles aigus $= m$, le sinus de l'autre angle étant $= n$, l'on a $m^2 + n^2 = 1$,

(en se souvenant que $m^2 + n^2 = 1$). Substituant cette valeur de y dans la premiere équation, on en déduira facilement $x = + mu + nt - f$. On vient de voir que $u = ps$, & $t = r - sq$. Substituant donc ces valeurs au lieu de u & de t, la courbe sera rapportée aux coordonnées s & r. Si l'angle dtm est droit, on aura $q = 0$, $p = 1$, $u = s$ & $t = r$. Ces déterminations peuvent s'appliquer à tout axe dP situé dans le plan de la courbe & faisant un angle quelconque avec le premier axe. De plus il est évident qu'en substituant à la place de x & y les valeurs que nous venons de trouver, dans la nouvelle équation à la courbe les t & les u, ou les r & les s ne monteront qu'au même degré que les x & les y, ou leurs produits, & que le degré de l'équation & par conséquent l'ordre de la courbe ne changera pas par cette substitution *.

Si on a une courbe mm (fig. 6.) dont l'axe des abscisses soit ap, l'origine des x en a hors de la courbe, ou en a' sur la courbe, ou en A dans la courbe, si on change les x en y, les dm, qm ou ap, $a'p$, Ap deviendront y, & les pm deviendront ad, $a'q$, Ad, ou x & la ligne nad, ou $na'q$, ou nAd deviendra l'axe des abscisses; or cette substitution ne changera pas le degré de l'équation, ni par conséquent l'ordre de la courbe. On appelle *axe des ordonnées* une ligne droite pa-

puisque le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés des deux côtés qui comprennent l'angle droit.

* Si la courbe étoit rapportée aux coordonnées obliques r & s, on pourroit la rapporter aux coordonnées perpendiculaires t & u en faisant $s = \frac{u}{p}$ & $r = t \pm sq$, le signe + auroit lieu si l'angle dtm étoit aigu & le signe — s'il étoit obtus.

rallele aux ordonnées & qui passe par l'origine des abscisses; & il est visible, par ce que nous venons de dire, qu'on peut changer l'axe des x en celui des y, & réciproquement sans changer l'ordre de la courbe.

Supposons maintenant que l'angle H A b (fait par l'axe A b des x & l'axe A H des y) est oblique ou droit, comme on voudra, & qu'on veuille rapporter la courbe aux nouveaux axes A B, A h (fig. 6. A) qui font entr'eux un angle quelconque. Je prends A h = 1 (1 signifie l'unité de ligne) = A b & je mene h C parallele à A b, h H parallele à A B, b B parallele à A H; & supposons que l'on ait A b : b B :: 1 : p, & A b : A B :: 1 : q. Les triangles H h C, A B b, ayant leurs côtés paralleles, sont semblables & donnent A B : A b :: H h : C h & A B : B b :: H h : C H. Si donc on fait H $h = t$, A H $= s$, on aura $q : 1 :: t : Ch = \frac{t}{q}$. Mais $1 : p :: Ab : bB :: Ch : CH$; donc $CH = \frac{pt}{q}$; & A C $= s - \frac{pt}{q}$. Maintenant puisque F E = A d étant $= x$ par rapport à l'axe A b, & d E = A F étant y, si l'on fait E e (parallele à A h) = A $f = u$ & f E = A $e = z$, les triangles semblables A C h, A F f donneront $1 : s - \frac{pt}{q} :: u : AF = y = su - \frac{ptu}{q}$. On aura aussi A h : C h :: A f : F f, ou $1 : \frac{t}{q} :: u : Ff = \frac{tu}{q}$. Donc $x = FE = Ff + Ae = \frac{tu}{q} + z$. Substituant ces valeurs de y & de x dans l'équation de la courbe, elle sera rapportée aux coordonnées u & z, & aux axes A B & A h. Si l'on vou-

loit seulement changer l'axe Ab des x pour rapporter la courbe aux axes AH & AB, l'on feroit $AB = 1$, $bB = a$, $Ab = b$, & les triangles semblables ABb, Adg donneroient $1 : a :: Ag$ (que je fais $= z$) : $dg = pz$; donc $Eg = Ed + dg = y + az = u$, & $y = u - az$ (si la ligne AB étoit située au-dessus de Ab, on auroit $y = u + az$). Si l'on fait maintenant $1 : b :: AB : Ab :: Ag : Ad = x = bz$; & qu'on substitue dans l'équation de la courbe les valeurs de y & de x que nous venons de trouver, elle sera rapportée aux axes AH & AB. Si l'origine des abscisses a passé de a en d (fig. 5.) & que l'angle des coordonnées ait varié, on pourra se contenter d'ecrire $z + \frac{tu}{q} - f$, $su - \frac{ptu}{q} - g$ au lieu de x & de y.

6. Cherchons maintenant quelles sont les lignes géométriques du premier ordre, désignées par une équation quelconque du premier degré composée de x, y & constantes. Soit l'équation générale du premier degré $ny = ma + mx$, ou $y = \frac{ma + mx}{n}$, ma représente toutes les quantités constantes, & m le coefficient de x qui peut être positif ou négatif. Sur la ligne mn (fig. 7.) qu'on prendra pour l'axe des abscisses, qu'on supposera positives du côté de n & négatives du côté de m, ou réciproquement, en supposant les quantités n, m, a positives, prenons le point a pour l'origine des abscisses & faisons $Ca = a$. Si l'on fait ar quatrième proportionnelle aux lignes données n, m, a, élevant ar perpendiculairement à la ligne mn, par le point C & le point r on menera la ligne droite Bd qui répondra à l'équation proposée. En effet

ſuppoſant $au = x$, l'ordonnée uq (parallele à ra) $= y$, on aura $Cu = Ca + au = a + x$, & à cauſe des triangles ſemblables Car, Cuq on aura Ca (a) : ar $\left(\frac{ma}{n}\right)$ :: Cu $(a + x)$: uq $= y = \frac{ma + mx}{n}$. Si on ſuppoſe $a = 0$, on aura $ar = \frac{ma}{n} = 0$, & l'équation deviendra $y = \frac{mx}{n}$. Faiſant $Cf = n$, $fg = m$ & menant par g & C la ligne dB, on aura la ligne cherchée, en ſuppoſant l'origine des x en C. En effet les triangles ſemblables Cuq, Cfg donneront Cf (n) : fg (m) :: Cu (x) (à cauſe de l'origine des x en C) : $uq = y = \frac{mx}{n}$. Si a étoit négative l'équation ſeroit $y = \frac{mx - ma}{n}$. Prenant $CA = -a$, le point A pour l'origine des abſciſſes, & $AR = -\frac{ma}{n}$ (AR eſt ſituée du côté des y négatifs), les points R & C détermineront la poſition de la ligne Bd. En effet les triangles ſemblables CAR, Cuq donnent CA $(-a)$: AR $\left(\frac{-ma}{n}\right)$ :: $Cu = Au - CA = x - a$: $uq = y = \frac{mx - ma}{n}$. Si ſuppoſant m, n, a poſitifs, x étoit négatif, on auroit $y = \frac{ma - mx}{n}$, quantité poſitive lorſque $x < a$: or les triangles Cfg, Cra donnent Ca (a) : ar $\left(\frac{ma}{n}\right)$ :: Cf $(a - x)$: $gf = y = \frac{ma - mx}{n}$. Si dans cette

même supposition on suppose $x = a$, l'on aura $y = o$, ce qui d'ailleurs est évident, puisque y devient o en C, où l'on a aC $(-x) =$ C$a = a$. Si dans cette même supposition $x > a$, y sera négatif : car les triangles VQC, Cra donnent $a : \frac{ma}{n} ::$ CV $(-x + a)$: VQ $= y = \frac{-mx + ma}{n}$, quantité négative dans ce cas.

Si m & n sont toutes deux négatives, la valeur de y ne changera pas, parce que l'une se trouvant au numérateur, l'autre se trouve au dénominateur. Mais si l'une des deux seulement étoit négative, la position de la ligne Bd en seroit changée, de sorte que qu deviendroit uh, les ordonnées positives deviendroient négatives & réciproquement.

Si l'une des inconnues x, par exemple, manquoit dans l'équation, l'on auroit $y = \frac{ma}{n}$, quantité constante. Dans ce cas la ligne demandée seroit parallele à la ligne des abscisses. En effet, en supposant $mo = \frac{ma}{n}$, il est évident que toutes les ordonnées ma, nB terminées à la ligne oB parallele à l'axe mn, sont égales à $\frac{ma}{n}$. Si dans ce cas on fait $a = o$, y sera $= o$, c'est-à-dire que oB se confondra avec mn. Si l'inconnue y manque dans l'équation de maniere que l'on ait une équation de cette forme $x = \frac{ma}{n}$, il est visible qu'en comptant les abscisses depuis le point C & faisant C$n = \frac{ma}{n}$, on aura C$n = p$B $= x = \frac{ma}{n}$, ainsi la ligne cherchée seroit une ligne Bn pa-

rallele à l'axe des ordonnées pC (on suppose l'origine des x en C), & si on supposoit $a = o$, on auroit $x = o$. Donc cette ligne Bn se confondroit avec Cp axe des ordonnées.

7. COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire, il suit évidemment que toute équation du premier degré à une ou deux inconnues représente une ligne droite & non une ligne courbe; ainsi les lignes du premier ordre se réduisent toutes à la ligne droite.

De quelques propriétés des lignes de tous les ordres.

8. Il est visible par les premieres notions de la Géométrie, que deux lignes droites différentes ne peuvent avoir deux points communs; donc une ligne du premier ordre ne peut être coupée qu'en un seul point par une ligne droite. Je dis aussi qu'une ligne du second ordre ne peut être coupée qu'en deux points, une ligne du troisieme ordre qu'en trois points; & qu'en général une ligne de l'ordre n ne peut être coupée qu'en un nombre n de points par une ligne droite quelconque. En effet, soit l'équation générale des lignes du second ordre $y^2 + y.(lx + n) + mx^2 + px + q = o$. (Nous n'avons point donné de coefficient à y^2, parce qu'on peut toujours délivrer le premier terme d'une équation de son coefficient, comme nous l'avons vu dans le Calcul). Il est visible qu'on trouvera les points où la ligne des abscisses coupe la courbe, en faisant $y = o$ (parce que dans ces points y est $= o$), ce qui donnera $mx^2 + px + q = o$. Mais cette équation étant du second degré ne peut avoir que deux racines; donc la ligne des abscisses ne peut rencontrer la courbe qu'en deux points, & si la supposition de $y = o$,

rend les valeurs de x imaginaires, la courbe ne peut être rencontrée par la ligne des abſciſſes, ce qui peut arriver lorſqu'ayant changé la poſition de l'axe des abſciſſes (nº 4 & 5.), le nouvel axe ſe trouve tout-à-fait hors de la courbe. Si l'on fait $x = 0$ en prenant l'axe des x pour celui des y & réciproquement, on trouvera $y^2 + ny + q = 0$, équation qui, comme la précédente, ne peut avoir que deux racines ; donc l'axe des ordonnées ne peut couper une ligne du ſecond ordre qu'en deux points. De plus, parce que l'on peut prendre (5.) telle ligne que l'on voudra pour l'axe des abſciſſes, l'équation de la courbe reſtant toujours du même degré, il eſt viſible qu'une ligne du ſecond ordre ne peut être coupée qu'en deux points par une ligne droite quelconque. Mais elle peut être coupée en un ſeul point, comme il arrive à la parabole qui eſt coupée en un ſeul point par ſon axe. En général en ſuppoſant $y = 0$ dans une ligne de l'ordre n, repréſentée par l'équation $y^n + pxy^{n-1} + qx^n + lx^{n-1} + d = 0$; on aura $qx^n + hx^{n-1} + d = 0$, équation du degré n, qui ne peut avoir que n racines ; donc cette courbe ne peut être coupée par la ligne des abſciſſes, ni par aucune autre ligne en un nombre de points plus grand que n. Il peut ſe faire qu'elle ſoit coupée en un nombre moindre de points, ſi quelques-unes des racines de cette équation ſont imaginaires, ou même en aucun ſi toutes les racines de l'équation dont on vient de parler ſont imaginaires.

9. THÉORÊME GÉNÉRAL. *Une droite quelconque ne peut rencontrer une ligne d'un ordre n, qu'en un nombre n de points.*

10. PROBLÊME. *Déterminer la poſition d'une*

ligne d'un ordre quelconque n. Soit l'équation des lignes du premier ordre $y = \frac{ma}{n} + \frac{mx}{n} = b + cx$ en faisant $\frac{ma}{n} = b$ & $\frac{m}{n} = c$. Il est visible, par ce que nous avons déjà dit, que la position d'une ligne droite Bd (fig. 7.) ne dépend que de la détermination de b & de c, ou du rapport du coefficient de x & de la quantité constante am qui entre dans l'équation au coefficient de y; donc une ligne droite n'admet que deux déterminations, ou, ce qui revient au même, la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points; ce qu'on sait d'ailleurs. La position d'une ligne du second ordre ne dépend que de cinq points. En effet, prenant l'équation générale du second degré, qui peut représenter toutes les lignes du second ordre, $o = a + bx + cx^2 + dy + fxy + y^2$. Ayant pris ap (fig. 8.) pour l'axe, & le point a pour l'origine des x, si on suppose $y = o$, on aura $x = o$: car rien n'empêche de supposer l'origine des abscisses sur un point de la courbe; or alors à $y = o$ répond $x = o$; donc $a = o$. Faisant ensuite successivement $y = pB$, $x = ap$, $y = p'c$, $x = ap'$, $y = dp''$, $x = ap''$, $y = p'''f$, $x = ap'''$, on aura encore quatre nouvelles équations, au moyen desquelles on pourra déterminer les constantes b, c, d, f. D'ailleurs on a trouvé $a = o$; donc une ligne du second ordre admet seulement cinq déterminations, & sa position ne peut dépendre que de cinq points; & parce qu'une ligne quelconque du troisieme ordre peut être représentée par une équation à dix termes, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre en prenant une équation générale du

troisieme degré, que parmi ces dix termes il y en a un de constant, & qu'on peut supposer le terme où se trouve y^3 sans coefficient; on trouvera par la même méthode qu'une ligne du troisieme ordre admet neuf déterminations; c'est-à-dire, est déterminée par neuf points, & en général une ligne d'un ordre n admet seulemeut $\frac{n.(n+3)}{2}$ déterminations, de sorte que si le nombre des points par lesquels on veut faire passer une ligne de l'ordre n, est moindre que $\frac{n.(n+3)}{2}$, on pourra faire passer par ces points une infinité de lignes du même ordre.

REMARQUE I. On sait par les Éléments de Géométrie que la position d'un cercle ne dépend que de trois points, & que deux cercles différents ne peuvent avoir trois points communs; donc quoi qu'en général on puisse faire passer une infinité de lignes du second ordre par trois points donnés, cela ne doit point s'entendre de toutes les especes de lignes de cet ordre.

REMARQUE II. Avant de passer plus loin, nous ferons remarquer que pour qu'une ligne appartienne à un ordre n, il est nécessaire que l'équation du degré n, qui represente cette ligne, ne puisse pas être résolue en facteurs rationnels; c'est-à-dire, que cette équation ne doit pas avoir de diviseurs commensurables, autrement elle seroit composée d'autres équations d'un degré inférieur, qui représenteroient des lignes d'un ordre inférieur. Ainsi l'équation $y^2 - ay - xy + ax = 0$, ou $(y - x) \times (y - a) = 0$, est composée de deux équations qui sont toutes les deux à une ligne

droite. En effet si l'on suppose que l'angle BCn (fig. 7.) est demi-droit, on aura toujours $Cu = x = uq = y$; donc l'équation $y - x = 0$ est à la ligne droite. L'équation $y - a = 0$, ou $y = a$ est aussi à la ligne droite : car supposant po parallele à mn, & $Cp = a$, on aura toujours $Cp = mo = Bn = y = a$. On peut voir aussi qu'en multipliant une équation qui représente une ligne de l'ordre n par une autre équation qui représente une ligne de l'ordre m, on auroit une ligne de l'ordre $m + n$ en apparence, qui ne seroit pas cependant de cet ordre; ainsi une équation du cinquieme degré pourroit paroître représenter une ligne du cinquieme ordre, quoiqu'elle ne représentât que deux lignes, l'une du second, l'autre du troisieme ordre *.

Des Lignes du second ordre.

11. Nons avons dit ci-dessus (7.) qu'une équation générale du premier degré à deux inconnues, ne représentoit qu'une ligne droite. Voyons maintenant quelles lignes représente l'équation générale du second degré $\begin{array}{l} y^2 + lxy + mx^2 + q = 0 \\ + ny + px \end{array}$, dans laquelle sont contenues toutes les lignes du second ordre, si on en excepte celles dans l'équation desquelles ne se trouve pas le quarré de y, & desquelles nous parlerons dans la suite. Soit cpd (fig. 9.) une courbe quelconque exprimée par notre équation; dans laquelle aB, soit $= x$ & $Bc = y$, il est

* On appelle ces sortes de lignes, *lignes complexes*. Celles au contraire dont l'équation n'est pas résoluble en facteurs rationnels, s'appellent *lignes continues*, *lignes incomplexes*.

facile de voir qu'il est nécessaire que y ait deux valeurs (à cause du quarré y^2 qui se trouve dans l'équation) représentées par Bc & Bd. Cela posé faisons $y = u - \left(\frac{lx + n}{2}\right)$*, ou $y + \frac{lx+n}{2} = u$. Prenant les quarrés des deux membres & transposant, on trouve $\begin{array}{l} y^2 + lxy \\ \quad\; + ny \end{array} = u^2 - \frac{l^2x^2}{4} - \frac{lnx}{2} - \frac{n^2}{4}$. Substituant cette valeur de $\begin{array}{l} y^2 + lxy \\ \quad\; + ny \end{array}$ dans l'équation générale ci-dessus, elle sera changée en celle-ci $\begin{array}{l} u^2 - \frac{l^2x^2}{4} - \frac{lnx}{2} + q = 0. \\ \qquad\qquad + mx^2 + px - \frac{n^2}{4} \end{array}$

Voyons maintenant ce qui arrive de nouveau dans la figure par ce changement de forme. Pour avoir la valeur de u, il faut ajouter premiérement à la ligne B$c = y$, la quantité $\frac{n}{2}$. Cela se fera en prenant fa parallele à dc, & $= \frac{n}{2}$, & tirant fg parallelement à aB : car par-là cg sera $= y + \frac{n}{2}$, $fg = a$B, étant x. Il faut ensuite ajouter à cg, que nous venons de trouver, la quantité $\frac{lx}{2}$, ce

* $\frac{lx + n}{2}$ est la moitié du coefficient du second terme, en supposant l'équation ordonnée par rapport à l'inconnue y, & considérant x comme connue. Voyez dans l'Algebre comment il faut s'y prendre pour délivrer une équation de son second terme.

que nous ferons en cette maniere. Faisons $fi : ik ::$ $2 : l$ *. Menant ik parallele à dc, par les deux points f, k on tirera fkh & l'on aura $gh = \frac{l.x}{2}$. En effet les triangles semblables fki, fgh donnent $fi : ik :: fg : gh :: 2 : l$; donc $gh = \frac{l \times fg}{2} = \frac{l.x}{2}$; donc $ch = y + \frac{lx}{2} + \frac{n}{2} = u$, en supposant toujours $fg = x$.

Mais parce que l'équation est entre u & x qui ne sont pas coordonnées, puisque u ou ch n'est pas terminée par fg, nous chercherons l'équation entre $u = ch$, & la ligne $fh = z$, à laquelle les u se terminent. Supposons la raison de fi à fk qui est connue par la construction, ** $= 2 : k$; donc on aura $x : z :: 2 : k$, & $x = \frac{2z}{k}$. Cette valeur de x, étant substituée dans la formule; donnera

$$u^2 - \frac{l^2 z^2}{k^2} - \frac{lnz}{k} - \frac{n^2}{4} = 0.$$
$$+ \frac{4mz^2}{k^2} + \frac{2pz}{k} + q$$

Il est évident qu'en opérant ainsi nous n'avons fait que transporter la ligne des abscisses de a B en fh; donc l'équation

* Si, par exemble, $l = 4$ on aura $fi : ik :: 2 : 4 ::$ $1 : 2$. On prendra donc dans ce cas $ki = 2.fi$. Si $l = 1$, on aura $fi = 2ki$, &c.

** Puisque le rapport de $fi : ik = 2 : l$, connoissant fi on connoîtra ik; donc dans le triangle fik, on connoîtra deux côtés & l'angle i compris entre ces côtés : car la position de fg & de ki est connue; ainsi l'on connoîtra l'autre côté fk.

que nous venons de trouver ne renferme pas moins les lignes du ſecond ordre *.

Cette équation fait voir que u a deux valeurs égales, l'une poſitive, l'autre négative; donc $dh = ch$; donc toutes les lignes paralleles à la ligne dc ſont coupées par fh en deux également; donc fh eſt un diametre** & dc une double ordonnée à ce diametre.

12. On doit faire une grande attention au coefficient du ſecond terme de l'équation que nous venons de trouver : car c'eſt de ce coefficient que dépend la diverſité des lignes du ſecond ordre. Ce coefficient eſt $\frac{4m}{k^2} - \frac{l^2}{k^2}$. Maintenant il peut arriver trois cas : 1° que $4m = l^2$. Dans ce cas ce coefficient eſt $= 0$, & le ſecond terme s'évanouit. 2° Il peut ſe faire que $m > \frac{l^2}{4}$, alors le ſecond terme eſt poſitif, il ſera au contraire négatif ſi $m < \frac{l^2}{4}$. Cela poſé changeant u en y & z en x, les trois cas dont nous venons de parler ſeront repréſentés par les équations

$y^2 - bx - c = 0$, en ſuppoſant $4m = l^2$

$y^2 + ax^2 - bx - c = 0$, en ſuppoſ. $\frac{4m}{k^2} - \frac{l^2}{k^2} = a$; quantité poſitive.

$y^2 - ax^2 - bx - c = 0$, en ſuppoſ. $\frac{4m}{k^2} - \frac{l^2}{k^2} = -a$, quantité négative.

* Il faut en excepter les lignes dans l'équation deſquelles le quarré y^2 manque, ainſi que nous l'avons dit ci-deſſus.

** Nous entendons ici par diametre une ligne qui partage ſes doubles ordonnées en deux également, quelque ſoit l'angle des coordonnées.

Il

Il eſt aiſé de voir qu'on a ſuppoſé $-\frac{ln}{k}+\frac{2p}{k}$ $=-b$, & $-\frac{n^2}{4}+q=-c$. Dans la premiere formule ſi x augmente à l'infini, & qu'on ſuppoſe b & x tous deux poſitifs ou tous deux négatifs, il eſt sûr que y aura deux valeurs réelles & égales entr'elles, l'une poſitive, l'autre négative. Mais ſi l'un des deux étant poſitif, l'autre eſt négatif, les valeurs de y ſeront imaginaires, du moins en ſuppoſant $x=\infty$; donc la courbe ne peut avoir que deux branches infinies d'un ſeul côté. Il n'eſt pas difficile de voir que ſi l'on avoit une équation de cette forme $x^2-by-c=0$, en changeant x en y & réciproquement, il en réſulteroit une équation de la forme, $y^2-bx-c=0$, qui donne la premiere formule.

Si dans la ſeconde équation l'on ſuppoſe x poſitif ou négatif infini, les valeurs de y ſeront imaginaires; donc la courbe n'aura point de branches infinies. Enfin dans la troiſieme équation ſi x poſitif ou négatif devient infini, y aura toujours deux valeurs réelles, c'eſt pourquoi la courbe aura quatre branches infinies, deux du côté des x poſitifs & deux du côté des x négatifs; donc il y a trois eſpeces de lignes du ſecond ordre, la premiere eſpece s'appelle *Parabole*, la ſeconde *Ellipſe* (dans laquelle on comprend le cercle); la troiſieme comprend les *hyperboles oppoſées*.

Revenons un moment à la formule générale. Nous venons de voir que la courbe étoit une parabole, lorſque $4m=l^2$, ou $m=\frac{l^2}{4}$. Mais dans cette hypotheſe la ſomme de tous les termes dans

lesquels la somme des exposants des indéterminées x & y est $= 2$, est un quarré parfait $y^2 + lxy + mx^2 = y^2 + lxy + \frac{l^2}{4}x^2$; donc cette somme peut se résoudre en deux facteurs égaux; donc toutes les fois que $y^2 + lxy + mx^2$ pourra se résoudre en deux facteurs égaux, l'équation sera à la parabole. Mais si $m - \frac{l^2}{4}$ est une quantité positive (ce qui donne une Ellipse), $y^2 + lxy + mx^2$ ne pourra pas se résoudre en deux facteurs réels; donc lorsque cette derniere formule ne peut pas se résoudre en deux facteurs réels, la courbe est une Ellipse. Enfin $y^2 + lxy + mx^2$ se résout en facteurs réels *, si $m - \frac{l^2}{4}$ est une quantité négative, c'est le cas de l'Hyperbole; donc la courbe sera une Hyperbole toutes les fois que cette formule sera résoluble en facteurs réels inégaux. On peut donc reconnoître facilement dans les différents cas ces trois especes de courbes. Venons à la Parabole.

13. La formule générale de la Parabole est celle-ci, $y^2 = bx + c = b \times \left(x + \frac{c}{b}\right)$. Faisant $x + \frac{c}{b} = z$ (ce qui ne fait autre chose que changer l'origine des abscisses), on aura $y^2 = bz$, ou changeant z en x, $y^2 = bx$, ou en faisant $b = p$, $y^2 = px$, équation à la Parabole, ainsi que nous l'avons vu dans les Sections Coniques. Si b étoit négatif, l'équation feroit $y^2 = -bx$. C'est-à-dire qu'aux x

* Pour faire cette résolution, on n'a qu'à supposer $y^2 + lxy + mx^2 = 0$, & chercher les racines de cette équation, en regardant y comme l'inconnue.

positifs répondroient des y imaginaires, & des y réels aux x négatifs : car x étant négatif on aura $y^2 = -b \times -x = bx$, & $y = \pm \sqrt{bx}$.

14. Passons à la formule de l'Ellipse $y^2 + ax^2 - bx - c = 0$, ou $\frac{y^2}{a} + x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} = 0$, ou $\frac{y^2}{a} + x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}$ * $= 0$. Si on transfere l'origine des abscisses en faisant $x - \frac{b}{2a} = z$, on aura $x^2 - \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = z^2$. Substituant z^2 à la place de sa valeur dans la derniere formule, on trouve cette équation plus simple $\frac{y^2}{a} + z^2 - \frac{b^2}{4a^2} \atop - \frac{c}{a}$ $= 0$, ou $\frac{y^2}{a} = \frac{b^2}{4a^2} \atop + \frac{c}{a}$ $- z^2$. Il est visible que y sera imaginaire (il en est de même de la courbe) toutes les fois que $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$ est une quantité négative ; c'est-à-dire, que dans ce cas l'équation ne représente aucune courbe possible. Pour donner une forme plus commode à l'équation, supposons $g^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$ & $\frac{g^2}{f^2} = \frac{1}{a}$. Substituant ces valeurs & changeant z en x, on aura $\frac{g^2}{f^2} y^2 = g^2 - x^2$, ou $y^2 = \frac{f^2}{g^2}(g^2 - z^2)$, équation à une Ellipse dont les demi-diametres seroient

* On ne fait qu'ajouter & retrancher $\frac{b^2}{4a^2}$, ce qui peut évidemment se faire.

f & g. Si on fait $f = g$, il vient $y^2 = g^2 - x^2$, équation au cercle lorsque l'angle des coordonnées est droit, & aux diametres conjugués égaux de l'Ellipse dans le cas contraire.

15. Examinons enfin la derniere formule $y^2 - a x^2 - b x - c = 0$ (qui appartient à l'Hyperbole). Divisant par a, ajoutant & retranchant en même temps $\frac{b^2}{4a^2}$, nous aurons $\frac{y^2}{a} - x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$. Faisant $x + \frac{b}{2a} = z$, l'on aura $z^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$, substituant $-z^2$ à la place de $-x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$, il vient $\frac{y^2}{a} - z^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$. Maintenant si $\frac{b^2}{4a^2} > \frac{c}{a}$, supposant $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = g^2$, $\frac{1}{a} = \frac{g^2}{f^2}$, & changeant z en x on aura l'équation $\frac{g^2}{f^2} y^2 - x^2 + g^2 = 0$, ou transposant & divisant par le coefficient du premier terme, $y^2 = \frac{f^2}{g^2}(x^2 - g^2)$, ou changeant f en b & g en a, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, équation à l'Hyperbole.

Revenons à la formule & supposons que $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ est une quantité négative $= - g^2$, nous aurons $\frac{g^2}{f^2} y^2 = z^2 + g^2$ (en supposant toujours $\frac{1}{a} = \frac{g^2}{f^2}$), ou changeant g en a, f en b, z en x,

& divisant tout par le coefficient du premier membre, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + a^2)$, équation qui appartient encore à l'Hyperbole. Si $a = b$ l'équation sera à l'Hyperbole équilatere.

Supposons enfin $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$, ou $\frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$. Substituant x à la place de z, & $\frac{b^2}{c^2}$ à la place de $\frac{1}{a}$, on a l'équation $\frac{b^2}{c^2} \times y^2 = x^2$, ou en prenant les racines, $\frac{b}{c} y = x$, équation à une double ligne droite CB, Cz : car faisant C$a = b$, $ar = az = c$, les lignes CB (fig. 7.), Ch prolongées à l'infini satisferont à l'équation, les Cu seront les x, les uq, les y positifs, les uh les négatifs. En effet les triangles semblables Car, Cuq donnent $b : c :: x : y$, d'où l'on tire $x = \frac{by}{c}$. Les triangles Caz, Cuh donnent C$a : az ::$ C$u : uh$ ou $c : b :: -y : x = -\frac{by}{-c}$ (parce que az est dans une situation opposée à ra) $= \frac{by}{y}$.

16. Voyons maintenant quelle courbe désigne l'équation générale du second degré, lorsque y^2 ne s'y trouve pas. Dans ce cas la formule peut s'exprimer ainsi $xy + mx^2 + px + ny + q = 0$ *. Si on fait $y + mx + p = u$, en substi-

* Il n'y a qu'à supposer que le terme affecté de xy est le premier terme de l'équation, & qu'on a tout divisé par le coefficient de ce terme.

tuant u à la place de sa valeur, nous aurons l'équation $xu + ny + q = 0$. Multipliant u & sa valeur par n, ajoutant nu & retranchant le produit de sa valeur de u par n, il viendra (A) $xu + nu - mnx - np + q = 0$. Voyons quel changement produit dans la courbe cette substitution. Soit cq (fig. 10.) la courbe de l'équation, $ab = x$, $bc = y$. Pour trouver u il faut ajouter à y la quantité p. Ainsi du point a menant af parallele à ch & égale à la constante p, & par le point f menant fo parallele à ba, bg sera $= p = af$, $cg = y + p$ & $fg = ab = x$. Il faut encore ajouter mx, c'est-à-dire, une ligne qui soit à x comme m est à l'unité. Soit $fo : ok :: 1 : m$. Supposant ok parallele aux ordonnées, menez fk. Les triangles semblables fok, fgh donneront $fo : ok :: fg : gh :: 1 : m$; donc $fg \times m$, ou $mx = 1 \times gh = gh$; donc $ch = y + mx + p = u$. Telle est l'équation entre ch & fg. Mais cherchons l'équation entre ch & dh, afin que les ordonnées soient terminées aux abscisses. Pour cela soit $fo : fk :: 1 : k$. Faisant $fh = z$, on aura $fg : fh$, ou $x : z :: 1 : k$ & par conséquent $x = \frac{z}{k}$. Sustituant cette valeur de x dans l'équation A, nous trouverons $\frac{zu}{k} + nu - \frac{mnz}{k} - np + q = 0$, ou ôtant la fraction, $zu + nku - mnz - nkp + qk = 0$. Il est aisé de voir que la courbe n'a point changé par cette substitution. Seulement on a transposé l'origine des abscisses de la ligne ab, à la ligne fh.

Mais continuons les substitutions. Soit $z + nk = x$, ou $z = x - nk$, prenant $df = nk$, $dh =$

$df + fh$ sera $= z + nk = x$. Soit de plus $u - mn = y$ *, ou $u = y + mn$, en substituant ces valeurs de z & de u dans la derniere équation à la courbe, il viendra $xy + mn^2k - nkp + qk = 0$. Prenant donc parallelement aux ordonnées $dm = mn = \frac{m \times n}{1}$, & menant mi parallele à dh, ic sera $= y = u - mn$ & $mi = dh = x$, & faisant la somme des quantités constantes $= c^2$, l'on aura $xy + c^2 = 0$, ou $xy = - c^2$. Si c^2 est une quantité négative, l'équation sera $xy = c^2$, équation aux asymptotes d'une Hyperbole, dont la puissance $= c^2$. Si c^2 est une quantité positive, en prenant sn pour la ligne des abscisses, aux abscisses dn positives répondront des y (nN) négatifs, & aux abscisses ds négatives des y (sf) positifs ; car $- y \times x$, ou $- x \times y$ donne $- xy = - c^2$. Si $c^2 = 0$, l'équation $xy = 0$, sera à deux lignes droites qui coincideront l'une avec l'axe sdn des abscisses, l'autre avec l'axe dm des ordonnées ; donc lorsque y^2 ne se trouve pas dans l'équation, l'équation appartient à l'Hyperbole rapportée aux asymptotes, ou à deux lignes droites, lorsque $c^2 = 0$. Ainsi dans ce dernier cas l'équation renferme le systême de deux lignes droites.

17. Quoique nous ayons déja traité des lignes du second ordre sous le nom *de Cercle*, *d'Ellipse*, *de Parabole* & *d'Hyperbole*, nous allons néanmoins parler de quelques propriétés générales qu'on tire de leur équation. Revenons donc à l'équation géné-

* Les x & les y dont il est ici question ne sont pas les mêmes que les x & les y de l'équation primitive.

rale $y^2 + y.(lx+n) + mx^2 + px + q = 0$. Cette équation, en regardant y comme l'inconnue, donnera deux valeurs de y, toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires (y a une seule valeur toujours réelle, lorsque y^2 manque dans l'équation); or c'est la propriété d'une équation quelconque que la somme de ses racines est égale au coefficient du second terme pris avec un signe contraire; donc la somme des deux valeurs de y sera $= -lx - n$.

Soit une ligne du second ordre fkc (fig. 11). Sur la ligne ao des abscisses dont l'origine soit supposée en a, prenons $aB = x$. A cette abscisse répondront les ordonnées Bd, Bc; donc $Bd + Bc = -lx - n = -l.aB - n$ *. Ayant pris ensuite une autre abscisse ah, à laquelle répondent les deux ordonnées hf, hg, on aura $hf + hg = -l.ah - n$. Retranchant la seconde équation de la premiere, on aura $Bd - hf + Bc - hg = -l.aB + l.ah$; c'est-à-dire (en menant fp & gq paralleles à Bo) $pd - qc = -l.hB$, & en changeant les signes, $qc - pd = l.hB$, d'où l'on tire $qc - pd : hB :: l : 1$. Donc la différence de pd à qc est à l'interceptée hB en raison constante de $l : 1$. S'il s'agit des ordonnées $2h2f$, $2h2g$, il est visible qu'on aura les équations $Bd + Bc = -l.aB - n$, $2h2f - 2h2g = -l.a2h - n$ (parce que $2h2g$ est négative); donc ayant mené $2f2p$, $2g2q$ parallelement à Bo, & retranchant la seconde équation de la premiere, il viendra $Bd - 2h2f + Bc + 2h2g$, ou $2pd + 2qc = l.B2h$; donc la somme des lignes

* Le point qui se trouve entre l & aB, indique le produit de l par aB.

$2pd$, $2qc$ eſt à la différence des abſciſſes en raiſon conſtante de $l:1$.

REMARQUE. Les lignes pd & qc, à compter des points p & q, tendent vers la courbe par des directions contraires ; mais les lignes $2qc$, $2pd$ rencontrent la courbe en allant dans la même direction.

Concevons que la ligne Bcd ſe meut parallelement à elle-même juſqu'à ce qu'elle devienne tangente en k, où les points c & d ſe confondront, les deux racines ou les $2y$ (Bc, Bd) deviendront égales à kl. Maintenant ſuppoſant menée kr parallele à la ligne des abſciſſes, nous aurons par une opération ſemblable aux précédentes $mc - md : lB = km :: l : 1$, c'eſt-à-dire, en raiſon donnée. Soit de même une autre droite hgf, parallele aux ordonnées, on trouvera $ng - nf : kn :: l : 1$; donc $mc - md : km :: ng - nf : kn$; donc ſi $mc - md = 0$, ou ſi $mc = md$, ng ſera $= nf$; *donc dans une ligne du ſecond ordre, ſi une ligne menée par le point de contact k diviſe en deux également une ligne parallele à la tangente, elle diviſera auſſi en deux également toutes les paralleles à la tangente.*

18. Par la propriété des équations du ſecond degré le produit des racines eſt égal au dernier terme de l'équation ; donc dans la même hypotheſe qu'auparavant on aura $Bc.Bd = mx^2 + px + q$ *. Si dans l'équation générale on fait $y = 0$, nous aurons $mx^2 + px + q = 0$, ou $x^2 + \frac{px}{m} + \frac{q}{m} = 0$.

* Toutes les quantités délivrées de l'inconnue y ſont cenſées former le dernier terme de l'équation.

Si les racines de cette équation sont réelles, il est nécessaire que la ligne des abscisses coupe la courbe en deux points ; de sorte que ai, ao seront dans ce cas les racines de cette derniere équation *; donc $x - ai$, $x - ao$ seront les facteurs de l'équation, & leur produit sera $x^2 + \frac{px}{m} + \frac{q}{m}$; donc $Bc.Bd = m.(x-ai).(x-ao)$ **. Mais $x = aB$; donc $Bc.Bd = m. - Bi. - Bo = m.Bi.Bo$. C'est pourquoi le rectangle $Bc.Bd$ est au rectangle $Bi.Bo$ comme $m : 1$, c'est-à-dire, en raison constante. On peut démontrer de même que $hg.hf : hi.ho :: m : 1$; donc $Bc.Bd : Bi.Bo :: hg.hf : hi.ho$. La même chose a lieu pour toutes les autres lignes paralleles aux ordonnées & qui rencontrent la courbe ; donc on peut établir le Théorême suivant.

19. THÉORÊME GÉNÉRAL. *Dans une ligne du second ordre, si deux droites paralleles à des lignes données coupent la courbe en deux points, les rectangles faits des parties interceptées entre le point de concours de deux lignes, & les points de section de la courbe sont en raison constante.*

20. COROLLAIRE I. Si les deux points de section se confondent en un, ce qui arrive lorsque la ligne de secante devient tangente, dans ce cas Bc & Bd étant chacune égale à lk, on aura le quarré de lk

---

* Dans cette équation, x est censé l'inconnue.

** On multiplie par m, parce que $Bc \times Bd = m \times (x^2 + \frac{px}{m} + \frac{q}{m}) = mx^2 + px + q$. Mais $(x - ai).(x - ao) = x^2 + \frac{px}{m} + \frac{q}{m}$.

au rectangle de li, lo en raison constante. Si on a un diametre kr (fig. 13.) rencontrant la courbe en deux points k, r on aura $kN \cdot Nr : Na \cdot Nb = (Na)^2$ (parce que le diametre divise ses doubles ordonnées en deux également) $:: kM \cdot Mr : Md \cdot Mc = (Md)^2$; c'est-à-dire, que les produits des abscisses sont toujours comme les quarrés des ordonnées. Si le point r est à une distance infinie, ce qui arrive pour les diametres de la parabole, dans ce cas rN, rM sont censées égales ; donc en divisant les antécédents par rN ou rM, l'on aura le rapport des abscisses égal au rapport des quarrés des ordonnées correspondantes. Il est aisé de voir ce qui doit arriver dans la figure 11, en supposant que kr est un diametre.

21. COROLLAIRE II. Si deux droites tirées d'un même a (fig. 12.), sont supposées couper la courbe aux points m, n, i, o, ayant tiré dp parallele à na, coupant ao en c, & fg parallele à oa coupant an en h. Si ao est regardée comme la ligne des abscisses, on aura $ai \cdot ao : am \cdot an :: ci \cdot co : cd \cdot cp$. Si ensuite nous prenons an pour la ligne des abscisses, nous aurons $am \cdot an : ai \cdot ao :: hm \cdot hn : hf \cdot hg$; donc $ci \cdot co : cd \cdot cp :: hf \cdot hg : hm \cdot hn$; donc si l'on a deux lignes qui se coupent en un point h & qui rencontrent la courbe chacune en deux points, ayant tiré deux autres lignes qui leur soient paralleles & qui fassent la même chose, les rectangles faits des parties interceptées entre les points de concours des lignes & les points de section de la courbe seront proportionnels & par conséquent en raison constante.

22. THÉORÊME. *Dans une ligne du second ordre ayant mené deux cordes* ab, cd (fig. 13.) *paralleles & tiré les lignes* ac, bd *pour avoir le*

trapeze $c\,d\,b\,a$, si dans ce trapeze on mene une ligne $m\,n$ parallele aux cordes $c\,d$, $a\,b$, les interceptées mp, $q\,n$ seront égales. Car si l'on mene le diametre $k\,r$ qui divise en deux également $a\,b$ & cd, il divisera aussi en deux également la parallele $m\,n$. Mais par la Géométrie vulgaire, il est évident que ce diametre doit diviser $p\,q$ en deux également; donc $mp = q\,n$.

COROLLAIRE I. Donc $mq = np$.

COROLLAIRE II. Il suit du Corollaire précédent que si l'on a cinq points de la courbe a, b, d, c, m il sera aisé d'en trouver un sixieme n en menant $m\,n$ parallele aux lignes $a\,b$, $c\,d$, & les lignes $a\,c$, $b\,d$ pour prendre ensuite $p\,n = q\,m$. Il est visible que cette méthode suppose que les points a, b, c, d sont disposés de façon que les lignes $a\,b$ & $c\,d$ sont paralleles, & que le point m est sur un arc de la courbe compris entre ces paralleles.

De quelques propriétés des Lignes du troisieme Ordre.

23. Soit l'équation générale des lignes de cet ordre $y^3 + (bx + c).y^2 + (d\,x^2 + f\,x + g).\,y + h\,x^3 + l\,x^2 + m\,x + n = 0$ *. A moins donc que le premier terme y^3 manque dans l'équation, à chaque abscisse x répondront trois ordonnées réelles ou au moins une **. Supposons que les trois ordon-

* Le premier terme est délivré de son coefficient, parce que l'on peut toujours se procurer une équation qui ait cette condition ainsi qu'on l'a vu dans l'Algebre.

** Parce qu'une équation d'un dégré impair a au moins une racine réelle, le nombre des racines imaginaires étant toujours pair.

nées sont réelles, il est visible qu'on peut déterminer leur rapport par le moyen de l'équation, & que la somme de ces trois ordonnées sera $= -bx - c$, & leur produit $= -hx^3 - lx^2 - mx - n$ (par les propriétés des équations), ce qui auroit lieu de même en supposant deux ordonnées imaginaires.

Soit (fig. 14) une ligne du troisieme ordre rapportée à l'axe ap des x; l'origine des x étant supposée en a. Faisant $ap = x$, l'ordonnée y aura trois valeurs pl, pm, $-pn$*; donc $pl + pm - pn = -bx - c$. C'est pourquoi prenant $po = z = \frac{pl + pm - pn}{3}$, le point o sera tellement situé, qu'on aura $lo = mo + no$. En effet, de l'équation $po = \frac{pl + pm - pn}{3}$, on tire $3po - pm + pn = pl = lo + po$. Effaçant po de part & d'autre il vient $2po + pn - pm = lo$, ou $po + pn + po - pm$, ou $on + om = lo$. Faisant de même $PO = \frac{PL + PM - PN}{3}$, on trouvera $LO + MO = ON$, & si par les points o & O on mene la ligne oz, cette ligne aura la propriété de couper toutes les ln, LN en deux parties telles que la somme de deux lignes om, on, ou LO, OM (qu'on peut regarder comme ordonnées à la ligne oz) situées d'un côté, sera égale à l'ordonnée lo, ou NO située de l'autre côté, & si om devient égale à on, alors $lo = 2om$. Nous appellerons la ligne oz *Diametre analogue.*

* pn a le signe $-$, parce qu'elle tend du côté opposé à lp, que nous supposons positive.

24. Venons maintenant au produit $-pm \cdot pn \cdot pl$ des trois ordonnées (on met le signe $-$ à cause de pn négative) $= -hx^3 - lx^2 - mx - n$. Si on fait $y = 0$ dans l'équation générale, on aura $hx^3 + lx^2 + mx + n = 0$, ou $x^3 + \frac{lx^2}{h} + \frac{mx}{h} + \frac{n}{h} = 0$. Les racines de cette équation donneront les points d'interfection de la courbe avec l'axe des abscisses ap; c'est-à-dire, que $(x - ab) \cdot (x - ac) \cdot (x - ad) = x^3 + \frac{l}{h} x^2 + \frac{m}{h} x + \frac{n}{h}$, ou $h \cdot (x - ab) \cdot (x - ac) \times (x - ad) = hx^3 + lx^2 + mx + n$; donc $pl \cdot pm \cdot pn = h \cdot pb \cdot pc \cdot pd$ (parce que x étant $= ap$, $x - ab$ devient pb, $x - ac$ devient $-pc$, & $x - ad$ devient $-pd$). On aura de même $PL \times PM \cdot PN = h \cdot Pb \cdot Pc \cdot Pd$; donc 1°. $pl \cdot pm \cdot pn : pb \cdot pc \cdot pd :: h : 1$, c'est-à-dire, en raison constante. De même $PL \cdot PM \cdot PN : Pb \cdot Pc \cdot Pd :: h : 1$; donc 2°. $pm \cdot pn \cdot pl : PL \cdot PM \cdot PN :: pb \times pc \cdot pd : Pb \cdot Pc \cdot Pd$; & dans les lignes du quatrieme ordre on trouvera que le produit des quatre ordonnées correspondantes à une abscisse, est au produit des quatre ordonnées correspondantes à une autre abscisse, comme le produit des quatre interceptées entre le point où se termine la premiere abscisse & les points où la ligne des abscisses coupe la courbe, au produit des quatre interceptées correspondantes à la seconde abscisse, & ainsi de suite pour les lignes du cinquieme, sixieme &c. ordre; de sorte que la courbe étant de l'ordre n (que je suppose le plus grand exposant de y), le produit de n ordonnées correspondantes à une abscisse, sera au produit de n interceptées correspondantes en raison constante, & par conséquent le premier produit est à un semblable produit de n ordonnées

correſpondantes à une autre abſciſſe, comme le produit de n interceptées correſpondantes à la premiere abſciſſe au produit de n interceptées correſpondantes à la ſeconde abſciſſe.

Des branches infinies des Courbes & de leurs aſymptotes.

25. *L'aſymptote* d'une Courbe eſt une ligne droite ou courbe, qui à l'infini ſe confond ou coïncide avec cette courbe; ſi l'aſymptote eſt rectiligne, elle eſt cenſée tangente de la courbe à l'infini. Si une Courbe a une branche infinie, & que d'un point de cette branche infiniment éloigné on ſuppoſe menée une ordonnée perpendiculaire, il eſt viſible que l'abſciſſe x ou l'ordonnée y, ou toutes les deux ſeront infinies. C'eſt pourquoi à une abſciſſe finie répondra une ordonnée réelle infinie, ou à une abſciſſe infinie une ordonnée finie ou infinie. Pour faire la recherche de ces ſortes de branches, je partage l'équation d'une Courbe quelconque en pluſieurs membres P, Q, R, S, &c. Le premier membre P contient tous les termes dans leſquels la ſomme des expoſants de x & y eſt $= n$, en ſuppoſant que n déſigne le degré de l'équation, le ſecond membre Q contient tous ceux dans leſquels cette ſomme $= n - 1$; R repréſente tous ceux dans leſquels cette ſomme $= n - 2$, &c. *

On doit principalement faire attention au pre-

* Si un terme contient x^n, il eſt cenſé contenir $y^0 x^n$, parce que $y^0 = 1$. De même la quantité by^n eſt $= bx^0 y^n$; or $0 + n = n$; donc dans ces quantités la ſomme des expoſants de x & y eſt $= n$.

mier membre P. Si ce membre n'a aucun facteur simple réel, mais s'il a au contraire tous ses facteurs imaginaires (ce qui ne peut arriver qu'en supposant que n est un nombre pair), la Courbe n'a aucune branche infinie. En effet il est nécessaire dans ce cas que P contienne x^n, & y^n : car si x^n ou y^n manquoit, P seroit divisible par x ou par y ; donc P auroit un facteur simple qui ne seroit pas imaginaire. Si la courbe a une branche infinie, x ou y ou tous les deux seront infinis ; donc P sera égal à l'infini élevé à la puissance n, c'est-à-dire, $= \infty^n$. Mais les membres suivants Q, R, &c. représentent tout au plus les infinis ∞^{n-1}, ∞^{n-2}, &c. qui disparoissent (voyez ce que nous avons dit de l'infini dans le Calcul) devant ∞^n ; donc l'équation devient $P = 0$; donc puisqu'on suppose que dans P il n'y a aucun facteur réel, cette équation ne peut avoir aucune racine réelle ; donc dans ce cas à une abscisse infinie réelle, il ne répond aucun y réel ; donc la Courbe n'a aucune branche infinie. De-là vient que la Courbe représentée par une équation de cette forme $y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + g = 0$, n'a aucune branche infinie lorsque le quarré de la moitié du coefficient du second terme est plus petit que le coefficient du troisieme ; car dans ce cas la Courbe est une Ellipse, & le membre P qui est ici $y^2 + axy + bx^2$ ne peut être résolu en facteurs réels (12.) *.

26. Si le premier membre P a un facteur réel, $ay - bx$, en changeant les coordonnées on peut

* Nous avons appellé l (12.) ce que nous appellons ici a, & m ce que nous appellons b.

se

se procurer une équation dans laquelle ce facteur réel de P soit l'ordonnée elle-même. Supposons que qc (fig. 15) représente la Courbe de l'équation, les ab étant x, & les cb étant y. Prenant $am = a$ & faisant la perpendiculaire correspondante $mn = b$, tirez ad & supposant l'angle $nam = s$, on aura cos. s : sin. s :: r : tang. s, ou $am\,(a) : mn\,(b) :: r$: tang. $s = \frac{r.b}{a}$. Le triangle amn donne encore $an = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; $nm\,(b) :: r$: sinus $s = \frac{rb}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Le même triangle donne $\sqrt{(a^2 + b^2)} : a :: r$: cos. $s = \frac{ar}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Du point c de la Courbe tirant cd perpendiculaire sur ad, je ferai $ad = t$, $cd = u$, & menant bp, bf paralleles aux nouvelles coordonnées, les triangles amn, abp ayant un angle commun en a, & les angles m & p droits sont semblables; donc $an : am :: ab : ap = \frac{ax}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. On a aussi $an : mn :: ab : bp = \frac{bx}{\sqrt{(aa - bb)}}$. De plus les triangles apb, fcb ont les angles p & f droits, & les angles en a & c égaux : car les angles bcf, cbp étant alternes internes sont égaux; or cbp est complément de abp, aussi-bien que l'angle a; donc l'angle c de l'un est égal à l'angle a de l'autre; donc les triangles bcf, apb sont semblables, & par conséquent aussi les triangles anm, cbf le sont; donc $an : mn :: cb : bf = pd = \frac{by}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Les mêmes triangles donnent $\sqrt{(a^2 + b^2)} : a :: y : cf = \frac{ay}{\sqrt{(a^2 + a^2)}}$;

or $t = ap + pd$ & $u = fc - fd = cf - bp$; donc $t = \frac{ax + by}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, & $u = \frac{ay - bx}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Si l'angle $s = 45°$, l'on aura $b = a$, & alors $t = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$, $u = \frac{y - x}{\sqrt{2}}$. De l'équation $u = \frac{ay - bx}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, on tire $u . \sqrt{(a^2 + b^2)} = ay - bx$; donc (puisque $ay - bx$ est un facteur réel du premier membre P) u sera un facteur réel de P dans la nouvelle équation qu'on trouvera en substituant les valeurs de x & y en t, u & constantes; car des équations précédentes on tire $y = \frac{au + bt}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, $x = \frac{at - bu}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Si P avoit pour facteur $(ay - bx)^2$, ou $(ay - bx)^3$, &c. dans le premier cas u^2, & dans le second u^3 seroit facteur de P. Si x & non y étoit facteur de P, dans ce cas on pourroit changer x en y (voyez le n° 5.) & réciproquement.

27. Supposons maintenant en premier lieu que y est un facteur de P tel qu'il n'y en ait aucun autre qui lui soit égal. C'est pourquoi soit $P = yM$, M étant du degré $n - 1$, on aura donc la formule $yM + Q + R + S +$ &c. $= 0$, ou $yM = - Q - R - S -$ &c. & $y = \frac{-Q - R - S - \&c.}{M}$ Mais Q étant du degré ∞^{n-1}, R du degré ∞^{n-2}, S du degré ∞^{n-3}, R & S disparoissent devant Q; donc $y = \frac{-Q}{M}$. Mais Q & M sont du degré ∞^{n-1}; donc y est fini. Effaçant donc dans Q & M les quantités multipliées par y^2, comme infiniment plus petites que les autres * & faisant

* Parce que y étant fini, ces quantités seront au moins de l'ordre ∞^{n-3}.

$-\frac{Q}{M} = p$, nous aurons $y = p$; donc l'équation $y - p = 0$ eſt contenue dans l'équation $P + Q + R +$ &c. $= 0$, ſi la Courbe a quelque branche infinie. Mais $y - p = 0$ eſt l'équation à une ligne droite parallele à la ligne des abſciſſes (6.), & diſtante de cette ligne de la quantité p; donc la Courbe à l'infini coïncide avec cette droite, qui par conſéquent eſt ſon aſymptote rectiligne, & cela ſoit qu'on prenne x poſitif ou négatif; il paroît donc que la Courbe a deux branches infinies, l'une du côté des x poſitifs, l'autre du côté des x négatifs qui ont pour aſymptote la même ligne prolongée à l'infini de part & d'autre.

Voilà ce qui arrive ſi le ſecond membre Q ſe trouve dans l'équation ſans être diviſible par y. Si Q eſt diviſible par y, faiſant $Q = yN$, N ſera du degré ∞^{n-2}; donc N ſera $= 0$ reſpectivement à yM; donc l'équation ſubſiſtera entre les termes $yM + R + S +$ &c. $= 0$, la même qu'on auroit ſi Q étoit $= 0$, ou ſi Q ne ſe trouvoit point dans l'équation. Dans ce cas on aura $y = \frac{-R}{M} - \frac{S}{M} -$ &c. M étant du degré ∞^{n-1}, R du degré ∞^{n-2}, S du degré ∞^{n-3}, &c. Mais cette équation ne peut avoir lieu ſi y n'eſt infiniment petit, parce que $\frac{-R}{M} - \frac{S}{M} = \frac{1}{\infty}$ *.

* Car $\frac{R}{M} = \frac{\infty^{n-2}}{\infty^{n-1}} = \frac{1}{\infty}$, & $\frac{S}{M} = \frac{\infty^{n-3}}{\infty^{n-1}} = \frac{1}{\infty^2}$; or $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$.

28 Si R se trouve dans l'équation sans être divisible par y, effaçant dans $-\frac{R}{M}$ tous les termes dans lesquels y se trouve, l'on aura $y = \frac{p}{x}$, p étant une quantité finie. Si R manque dans l'équation, ou si R a un facteur y, on aura $y = -\frac{S}{M} = \frac{p}{x^2}$ (parce qu'alors R disparoît devant yM). Si on suppose de plus que S manque dans l'équation, ou que S soit divisible par y, l'on aura $y = \frac{p}{x^3}$ *; de sorte qu'en général y devient $= \frac{p}{x^g}$. Si g est un nombre impair & p une quantité positive, x étant supposé positif, y le sera aussi; mais x étant négatif y sera négatif. Si g est un nombre pair, y sera positif ou négatif selon que p sera positif ou négatif; & dans tous ces cas la ligne des abscisses est l'asymptote de la Courbe, ce qui a lieu de même g étant impair, & p négatif. En effet faisant $x = \infty$, on aura $y = \frac{p}{\infty^g}$; donc à l'infini, y est un infiniment petit de l'ordre g; donc la ligne des abscisses coïncide avec la Courbe, ou devient sa tangente à une distance infinie. Les asymptotes désignées par la formule $y = \frac{p}{x^g}$ sont des lignes droites, on les appelle *hyperboliques*.

* p est une quantité finie qui varie selon que Q, ou R, ou S, ou &c. manquent dans l'équation.

En effet l'équation $y^m x^n = a^{m+n}$, aux hyperboles de tous les genres, donne $y = \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{x^{\frac{n}{m}}} = \frac{p}{x^g}$, en faisant $a^{\frac{m+n}{n}} = p$ & $\frac{n}{m} = g$. Mais à l'infini l'on a $y = \frac{p}{\infty g}$. L'on détermine donc par cette méthode une Hyperbole avec laquelle une Courbe donnée se confond à une distance infinie. C'est pourquoi l'on connoît non-seulement que la Courbe a une asymptote droite, mais on détermine encore de quel côté elle est située par rapport à l'asymptote. Si tous les termes Q, R, S, &c. manquoient dans l'équation, elle deviendroit yM $= 0$, laquelle étant divisible par y, fait voir que la Courbe est complexe, étant composée d'une droite qui est la ligne même des abscisses * & d'une Courbe de l'ordre $n - 1$. Si on trouve $y = p$ (p étant une quantité constante), dans ce cas l'asymptote est une droite parallele à la ligne des abscisses, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus (6.). Pour faire que les abscisses se trouvent sur l'asymptote, on supposera $y - p = u$, ou $y = u + p$. Substituant dans l'équation cette valeur de y & faisant x infini, u sera infiniment petit, puisque à l'infini, $u = y - p = p - p$. Etant donc donnée l'équation d'une Courbe, cherchez le nombre des facteurs réels & inégaux du membre P, & vous

* Car l'équation yM $= 0$, est divisible par $y = 0$. Mais l'équation $y = 0$ donne (6.) la ligne des abscisses.

aurez autant de paires de branches infinies & autant d'asymptotes que vous aurez trouvé de facteurs. Quant au genre de l'asymptote hyperbolique, vous le trouverez aisément par la méthode ci-dessus.

29. Supposons maintenant que P a un facteur réel double y^2, ensorte que $P = y^2 M$, M étant une fonction du degré $n-2$. Dans ce cas l'équation deviendra $y^2 M + Q + R + \&c. = 0$. Si Q se trouve dans l'équation sans être divisible par y, les termes R, S, &c. s'évanouissant devant Q, l'équation deviendra $y^2 M = -Q$. Cette équation peut être vraie si y^2 est $= \infty$, comme x. Dans ce cas $y = \sqrt{\infty} = \infty^{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, infinie par rapport à l'unité, mais infiniment petite par rapport à x : car $1 : \infty^{\frac{1}{2}} :: \infty^{\frac{1}{2}} : \infty$; donc disposant l'équation de cette maniere $y^2 = -\frac{Q}{M}$, tous les termes qui contiendront y, infiniment petit par rapport à x, s'évanouiront dans la fraction $-\frac{Q}{M}$; donc puisque Q est du degré $n-1$, M du degré $n-2$, on aura $-\frac{Q}{M} = px$ *, p étant une quantité finie & constante; donc $y^2 = px$, équation à la parabole vulgaire, p étant positif, les branches s'étendent du côté des x positifs; mais elles s'étendent du côté des x négatifs dans le cas contraire; donc la Courbe a deux branches infinies du même côté, entre lesquelles se trouve la ligne des abscisses.

Si l'on veut une parabole avec laquelle la Courbe

* Parce que ce quotient doit être $= \infty$; or x est supposé infini.

convienne plus intimement à une distance infinie, il ne faut pas négliger le terme suivant R, mais on doit prendre l'équation $y^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} = 0$. Parce que R & M sont des fonctions du même degré $n - 2$, effaçant les termes qui deviennent infiniment petits, on aura $\frac{R}{M} = q$, quantité finie; donc on aura l'équation $y^2 = px + q = \left(x + \frac{q}{p}\right).p$; équation à une parabole de même parametre; mais dont le sommet est éloigné de l'origine des abscisses de la quantité $\frac{q}{p}$.

30. Supposons maintenant que le second membre Q est divisible par y^2; de maniere que y^2 N soit = Q, N étant une fonction du degré $n - 3$. Puisque M est une fonction du degré $n - 2$, il est évident que y^2 N sera infiniment petit par rapport à y^2 M. C'est donc la même chose que Q manque dans l'équation ou soit divisible par y^2, ce qu'on doit dire de même de R, S, &c. Dans cette hypothese si R se trouve dans l'équation sans être divisible par y, l'équation sera $y^2 + \frac{R}{M} = 0$; or R & M étant du même degré $n - 2$, on aura $y^2 = -\frac{R}{M} = p$ (quantité finie & constante), & $y = \pm \sqrt{p}$. Si p est négatif, y sera imaginaire; donc dans ce cas la Courbe n'a aucune branche infinie. Si p est positif, la Courbe a deux asymptotes rectilignes & paralleles à la ligne des abscisses qui se trouve au milieu également éloignée de

l'une & de l'autre. Pour connoître le genre de l'asymptote, on fera $v - \sqrt{p} = u$. Cela fait par les regles que nous avons données, ou dont nous parlerons dans la suite, on connoîtra le genre d'une asymptote. De même faisant $y + \sqrt{p} = u$, ou $y = u - \sqrt{p}$, on déterminera le genre de l'autre asymptote.

31. Si non-seulement Q, mais encore R manque dans l'équation, ou si R est divisible par y^2, l'équation deviendra $y^2 = -\frac{S}{M} = \frac{p}{x}$. Si S manque aussi, ou est divisible par y^2, l'équation sera $y^2 = -\frac{T}{M} = \frac{p}{x^2}$, & ainsi de suite; de sorte qu'en général on aura $y^2 = \frac{p}{x^g}$, équation qui fera connoître & le nombre des branches infinies & le genre de l'asymptote.

Dans l'équation $y^2 = \frac{p}{x^g}$, soit d'abord supposé g un nombre impair. Si p est positif, du côté des x positifs, y a deux valeurs égales, l'une positive, l'autre négative; donc l'asymptote est hyperbolique, & la Courbe a deux branches, entre lesquelles se trouve l'asymptote rectiligne. Mais du côté des x négatifs y étant imaginaire, la Courbe ne peut avoir aucune branche infinie de ce côté-là. Le contraire arrive, p étant négatif. Si g est un nombre pair, p étant positif, y a deux valeurs réelles, soit du côté des x positifs, soit du côté des x négatifs; donc l'asymptote est hyperbolique & la Courbe a quatre branches infinies. Mais p étant négatif, y est imaginaire & la Courbe n'a aucune branche infinie.

Le cas dans lequel Q ou les membres suivans sont divisibles par y, est plus difficile. Si R se trouve dans l'équation, Q étant divisible par y & non pas R, soit $Q = yN$, N étant une fonction du degré $n - 2$, de même que M & R; donc l'équation subsiste entre les trois termes $y^2 M + yN + R = 0$. Cette équation, en supposant $x = \infty$, peut avoir lieu si y est fini; on aura donc $y^2 - py - q = 0$ (parce que $\frac{N}{M}$, $\frac{R}{M}$ deviennent des constantes p & q). Si l'équation $y^2 - py - q = 0$, a ses racines imaginaires, la Courbe n'a point de branches infinies. Si les racines de cette équation sont réelles, il y aura une double asymptote rectiligne, parallele à la ligne des abscisses. Ces asymptotes se confondront si les deux valeurs de y sont égales.

32. Si R manque ou est divisible par y, l'on a l'équation $y^2 M + yN + S = 0$, qu'on peut réduire à cette forme $y^2 - py - \frac{q}{x} = 0$. Si S manque aussi, on aura $y^2 - py - \frac{q}{xx} = 0$, & ainsi de suite. Si Q ne se trouve pas dans l'équation, ou est divisible par y^2, R étant supposée contenir y, ensorte que $R = yN$, N étant du degré $n - 3$, si S se trouve dans l'équation sans être divisible par y, l'équation deviendra $y^2 - \frac{py}{x} - \frac{q}{x} = 0$. Eloignant S & non T, l'on a $y^2 - \frac{py}{x} - \frac{q}{x^2} = 0$; & ainsi de suite. Si R est $= 0$, ou divisible par y^2, & S divisible par y; si S est sup-

poſée enſuite manquer dans l'équation, &c. on aura ſucceſſivement les équations $y^2 - \frac{py}{x^2} - \frac{q}{x^2} = 0$;

$$y^2 - \frac{py}{x^2} - \frac{q}{x^3} = 0;$$

& ainſi de ſuite. C'eſt pourquoi dans tous ces cas on trouve une équation à trois termes de cette forme $y^2 - \frac{py}{x^f} - \frac{q}{x^g} = 0$, dans laquelle g eſt plus grand que f, ou tout au moins $= f$.

Pour ſavoir ce qui arrive en ſuppoſant $x = \infty$, comparez deux termes de l'équation & déterminez le degré de y, enſorte que ces deux termes ſoient homogenes. Si le troiſieme ſe trouve infiniment petit par rapport aux autres, l'équation ſubſiſte entre les termes comparés. Mais ſi le troiſieme eſt du même degré que les autres, on ne doit pas l'omettre. Si le troiſieme eſt infini reſpectivement aux autres, l'équation ne peut ſubſiſter entre les termes comparés. Faites la même choſe pour chaque paire de termes. Cette méthode s'applique auſſi aux équations qui ont plus de trois termes, en faiſant pour la ſomme des termes négligés les mêmes raiſonnemens que nous venons de faire pour le troiſieme dans le cas du trinome.

Dans le trinome trouvé, pour que les deux premiers termes ſoient homogenes, c'eſt-à-dire, du même ordre d'infini, il eſt néceſſaire que y ſoit du degré $\frac{1}{\infty^f}$ *; donc les deux premiers termes ſont

* A cauſe que x eſt ſuppoſé $= \infty$, l'on a $y^2 - \frac{py}{x^f} = \frac{1}{\infty^{2f}} - \frac{p}{\infty^{2f}}$.

du degré $\frac{1}{\infty^{2f}}$, le troiſieme terme étant du degré $\frac{1}{\infty^g}$. Si $g = 2f$, le troiſieme terme eſt homogene aux deux autres, & l'on ne doit pas le négliger; donc on aura l'équation $y^2 - \frac{py}{xf} - \frac{q}{x^{2f}} = 0$. Si les racines de cette équation ſont imaginaires, la Courbe n'a point de branches infinies; ſi les racines ſont réelles il y a deux aſymptotes hyperboliques du degré $\frac{1}{\infty^f}$ *, qui ſe confondent en une ſi les deux racines ſont égales. Si $g < 2f$, le dernier terme eſt infiniment grand en comparaiſon des deux premiers; donc l'équation ne peut ſubſiſter entre les premiers. Examinons ſi elle peut avoir lieu entre le premier & le dernier. Pour que ces termes ſoient homogenes, y doit être du degré $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{2}}}$, alors l'un & l'autre terme ſera du degré $\frac{1}{\infty^g}$, le ſecond étant dans ce cas du degré $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{2}+f}}$; or $\left(\frac{g}{2}+f\right) > g$, ſi $2f > g$; donc le

* Si l'on ſuppoſe $p = -4$ & $q = -4$, on verra aiſément que cette équation devient $\left(y + \frac{2}{xf}\right) \times \left(y + \frac{2}{xf}\right) = 0$; donc y ſera un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{\infty^f}$, en ſuppoſant $x = \infty$. On peut prouver cela généralement, en réſolvant l'équation ci-deſſus.

ſecond s'évanouit devant les deux autres & l'on a l'équation $y^2 - \frac{q}{x^g} = 0$ qui détermine le genre de l'aſymptote. La comparaiſon du ſecond & du troiſieme terme ne donne rien dans cette ſuppoſition, parce que le premier devient infini par rapport aux deux autres. Si $g > 2f$, l'équation a lieu entre les deux premiers, le dernier devenant infiniment petit reſpectivement aux autres ; donc $y = \frac{p}{x^f}$, qui déſigne une aſymptote hyperbolique. Si on ſuppoſe le premier & le dernier termes homogenes, le ſecond ſe trouve infiniment plus grand que les autres ; donc il ne peut y avoir d'équation entre le premier & le dernier. Le ſecond & le dernier ſeront homogenes, ſi y eſt du degré $\frac{1}{\infty^{g-f}}$. Dans ce cas le premier eſt du degré $\frac{1}{\infty^{2g-2f}}$ & par conſéquent il s'évanouit devant les deux autres : car $(2g - 2f) > g$; donc on aura $y = -\frac{q}{p\,x^{g-f}}$, qui déſigne le genre de l'aſymptote.

3°. Si le premier membre P contient le facteur y^3, enſorte qu'on ait $P = y^3 M$, M étant du degré $n - 3$, ſi Q ſe trouve dans l'équation ſans être diviſible par y, l'équation aura lieu entre les deux premiers termes, & l'on aura $y^3 = -\frac{Q}{M}$. Q eſt du degré $n - 1$, M du degré $n - 3$; donc y^3 doit être du degré ∞^2, en faiſant $x = \infty$; donc $y = \infty^{\frac{2}{3}}$, & par conſéquent infiniment petit par rapport à $x = \infty$. Rejettant les termes évanouiſſans & faiſant la diviſion, il vient $y^3 = p\,x^2$; donc à l'infini

la Courbe convient avec la seconde parabole cubique, qui est son asymptote curviligne : elle a donc deux branches infinies, l'une du côté des x positifs, l'autre du côté des négatifs. Si p est positif, les branches sont situées du côté des ordonnées positives, & du côté des négatives, si p est négatif.

Supposons maintenant que le membre Q est divisible par y^3, il est visible qu'il disparoît devant P, ce qu'on doit dire aussi des membres suivans ; ainsi c'est la même chose que ces membres manquent dans l'équation, ou qu'ils soient divisibles par y^3. Si Q est divisible par y^3, ou manque dans l'équation, on aura $y^3 = \frac{-R}{M} = px$, en supposant x infini ; donc $y^3 = px$, équation à la premiere parabole cubique * ; donc la Courbe a une asymptote curviligne du genre parabolique, qui a deux branches infinies, l'une du côté des x positifs, l'autre du côté des x négatifs. Dans ce cas $y = \sqrt[3]{px}$; donc y est de l'ordre $\infty^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire que y est infini par rapport à l'unité ; mais infiniment petit par rapport à $x = \infty$.

Si R manque aussi dans l'équation, ou est divisible par y^3 & que les membres suivants ne soient pas divisibles par y, l'on aura l'équation $y^3 = \frac{-S}{M}$, & parce que S & M sont du même degré, l'on aura $\frac{-S}{M} = p$, quantité finie ; donc $y^3 = p$. Cette

* L'équation à la premiere parabole cubique est $y^3 = a^2x = px$ en faisant $p = a^2$.

équation ayant une racine réelle & deux imaginaires *, fait voir que la Courbe n'a qu'une seule asymptote rectiligne, dont on déterminera le genre par la méthode ci-dessus.

Si S manque dans l'équation, ou est divisible par y^3, on aura $y^3 = \frac{-T}{M} = \frac{p}{x}$. T manquant ou étant divisible par y^3, on aura $y^3 = \frac{p}{x^2}$. En général $y^3 = \frac{p}{x^\delta}$, qui désigne une asymptote hyperbolique.

34. Si Q est divisible par y^2, de sorte que Q soit $= y^2 N$, N étant du degré $n - 3$, l'on aura l'équation $y^3 M + y^2 N + R = 0$, ou $y^3 + y^2 \frac{N}{M} + \frac{R}{M} = 0$. Comme cette équation ne peut avoir lieu qu'en supposant y infiniment petit par rapport à x (parce que R est du degré $n - 2$), on a $y^3 - py^2 - qx = 0$. Si y^3 est supposé du même ordre que x, le terme du milieu py^2 disparoîtra devant les deux autres; donc on aura $y^3 = qx$, équation qui donne une asymptote parabolique du degré $\frac{1}{\infty^3}$ avec laquelle se confondent deux branches de la Courbe, l'une du côté des x positifs, l'autre du côté des

* Pour le prouver supposez $p = d^3$, on aura $y^3 - d^3 = 0$, divisant par $y - d = 0$, le quotient donnera l'équation $y^2 + yd + d^2 = 0$, dont les racines sont $y = -\frac{d}{2} \pm \frac{d}{2}\sqrt{-3}$; donc la seule racine réelle est $y = d$.

x négatifs : il n'y a aucune autre équation possible. Si R est divisible par y^2 ou manque dans l'équation, il vient $y^3 - py^2 - q = 0$, équation qui subsiste en supposant y fini. L'ordonnée y a une valeur réelle ou trois. Dans le premier cas il y aura une asymptote parallele à la ligne des abscisses, trois dans le second cas, à moins cependant que deux se confondent en une seule *. Quant au genre de l'asymptote on le connoîtra par les regles ci-dessus. Si non-seulement R, mais encore S manque dans léquation ou est divisible par y^2, on aura $y^3 - py^2 - \frac{q}{x} = 0$. T manquant ou étant divisible par y^2, l'on a $y^3 - py^2 - \frac{q}{x^2} = 0$; & en général $y^3 - py^2 - \frac{q}{x^\delta}$. De-là résultent deux équations, $y^3 = py^2$, ou $y = p$, qui donne une asymptote dont il faut chercher le genre, & $y^2 = \frac{-q}{p\,x^\delta}$, qui donne une asymptote du genre hyperbolique. Si Q manquant, R est divisible par y^2, l'on a $y^3 - \frac{py^2}{x} - \frac{q}{x^\delta} = 0$. Si R manquant, S est divisible par y^2; l'on aura $y^3 - \frac{py^2}{x^2} - \frac{q}{x^\delta} = 0$. C'est pourquoi on a en général $y^3 - \frac{py^2}{x^f} - \frac{q}{x^\delta} = 0$. Dans cette équa-

* Car les valeurs de y ne peuvent être toutes les trois égales, autrement le troisieme terme ne manqueroit pas dans l'équation. Voyez l'Algebre.

tion f ne peut être plus grande que g, mais elle peut être moindre ou égale.

Il peut arriver que g l'on ait $> 3f$, ou $g = 3f$, ou $g < 3f$. Dans le premier cas on a les deux équations $y = \frac{p}{x^f}$, $y^2 = \frac{-q}{p\,x^{g-f}}$, qui déterminent le genre de l'asymptote. Si $g = 3f$, supposant y de l'ordre $\frac{1}{\infty^f}$, le troisieme terme est du même ordre que les deux premiers; donc l'équation subsiste entre les trois termes, & y aura une ou trois valeurs de l'ordre $\frac{1}{\infty^f}$. Si $g < 3f$, l'on aura l'équation $y^3 = \frac{q}{x^g}$. On voit facilement de quel genre est l'asymptote dans les deux derniers cas.

35. Si Q est divisible par y & non pas R, on trouvera le trinome $y^3 - pyx - qx = o$, qui donne deux équations $y^2 = px$, $y^2 = \frac{-q}{p}$. La premiere équation marque une asymptote parabolique, la seconde une asymptote rectiligne, dont on déterminera le genre par la méthode ci-dessus *. Si R manque & non pas S, l'on aura $y^3 - pyx - q = o$, d'où l'on tire $y^2 = px$ & $y = \frac{-q}{px}$. En général on aura $y^3 - pyx - \frac{q}{x^g} = o$, d'où l'on tire $y^2 = px$ & $y = \frac{-q}{px^{g+1}}$.

* C'est-à-dire, on déterminera la Courbe avec laquelle se confond à l'infini celle de l'équation.

Que

Q ne se trouvant pas dans l'équation, supposons R divisible par y, mais non pas S, l'on aura $y^3 - py - q = 0$, équation qui a lieu en supposant y fini. Comme y dans cette équation a une valeur réelle ou trois, il y aura une ou trois asymptotes rectilignes, dont deux pourront tomber l'une sur l'autre si y a deux valeurs égales. Si S manque & non T, ou T & non V, &c. on aura en général $y^3 - py - \frac{q}{x^g} = 0$, d'où, $y^2 = p$ & $y = \frac{-q}{px^g}$. La seconde équation donne une asymptote hyperbolique; la premiere deux asymptotes rectilignes, si p est positif, & deux asymptotes imaginaires p étant négatif; c'est-à-dire, que dans ce dernier cas cette équation ne donne aucune branche infinie.

Si Q ne contenant pas y, quelqu'un des membres suivans est divisible par y, l'équation sera de cette forme $y^3 - \frac{py}{x^f} - \frac{q}{x^g} = 0$, dans laquelle f ne peut être plus grande que g. Il peut arriver que $3f < 2g$, que $3f = 2g$, que $3f > 2g$. Dans le premier cas on a $y^2 = \frac{p}{x^f}$, $y = \frac{-q}{px^{g-f}}$, qui désignent des asymptotes hyperboliques. Dans le second cas les trois termes étant homogenes, y a une ou trois valeurs de degré $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{3}}}$. Dans ce cas l'asymptote ou les asymptotes sont hyperboliques. Dans le troisieme cas on trouve la seule équation $y^3 = \frac{q}{x^g}$ qui donne une asymptote hyberbolique du degré $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{3}}}$:

puisque de cette équation on tire $y = \sqrt[3]{\frac{q}{x^g}}$.

36. Venons à la derniere hypothese, dans laquelle les termes qui contiennent soit y^2, soit y se trouvent dans l'équation. Si Q a un facteur y^2, R un facteur y; & que S se trouve dans l'équation, l'on a $y^3 - py^2 - qy - r = 0$, qui donne pour y une ou trois valeurs réelles, une ou trois asymptotes rectilignes, à moins que deux ou même les trois ne se confondent ensemble. Si S manque dans l'équation, on prendra en général le premier des membres suivans, pour avoir $y^3 - py^2 - qy - \frac{r}{x^g} = 0$, d'où l'on tire $y^2 - py - q = 0$ & $y = \frac{-r}{qx^g}$. La premiere de ces équations donne deux asymptotes rectilignes, à moins que les valeurs de y soient imaginaires ou égales. Dans ce dernier cas les deux asymptotes se confondent en une; la seconde donne une asymptote hyperbolique du degré $\frac{1}{\infty^g}$.

R, manquant si S ou quelqu'un des membres suivants contient y, l'on aura en général $y^3 - py^2 - \frac{qy}{x^f} - \frac{r}{x^g} = 0$. Dans cette équation, f ne peut être plus grande que g. De-là on tire cette équation $y^3 - py^2 = 0$, ou $y = p$, qui donne une asymptote rectiligne. De plus si l'on suppose y infiniment petit, y^3 disparoît devant y^2 & l'on a $y^2 + \frac{qy}{px^f} +$

$\frac{r}{p x^g} = 0$ *; équation de la forme de celle dont on a parlé ci-devant (32). **

37. Il nous reste à examiner ce qui arrive Q manquant & un des membres suivants étant supposé divisible par y^2. Dans ce cas on aura l'équation $y^3 - \frac{p y^2}{x^e} - \frac{q y}{x^f} - \frac{r}{x^g} = 0$, dans laquelle e ne peut être plus grand que f, ni f plus grande que g. Supposons $f = 2e$, $g = 3e$, d'où l'on tire $e = \frac{g}{3}$ & $f = \frac{2g}{3}$, ou $3f = 2g$. Si y est du degré $\frac{1}{\infty^e}$, tous les termes de l'équation sont homogenes & on ne peut en négliger aucun; donc la Courbe aura une ou trois asymptotes hyperboliques du degré $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{3}}}$; donc une ou trois asymptotes hyperboliques du même degré répondront à une même asymptote rectiligne ***.

Si les exposans de x ne sont pas tels que nous venons de les supposer, voyons si l'équation peut avoir lieu entre les deux premiers termes. Pour

* En divisant par p & changeant les signes.

** Si l'on suppose le second & le troisieme terme affectés du signe $-$, on aura une équation qu'on pourra réduire à la forme du n°. 32, & c'est dans ce sens qu'on doit entendre ce que nous venons de dire.

*** C'est-à-dire qu'à une même ligne des abscisses, qui sera l'asymptote, répondront une ou trois Courbes hyperboliques, avec laquelle ou lesquelles la Courbe proposée se confondra à l'infini.

cela il est nécessaire que y soit du degré $\frac{1}{\infty^c}$, & y^3 du degré $\frac{1}{\infty^{3c}}$. Si $f > 2c$ & $g > 3c$, l'égalité aura lieu entre les deux premiers termes, les autres s'évanouissant. Si $g > 3c$, mais $f = 2c$, les trois premiers termes formeront l'équation. Si au contraire $g = 3c$, $f > 2c$, les deux premiers & le dernier termes formeront l'équation. Il est aisé de voir par-là comment, en comparant les différents termes, on peut trouver les équations binomes ou trinomes qui doivent résulter de ces comparaisons.

Il n'est pas maintenant difficile de comprendre comment il faut procéder si le premier membre P contient y^4, y^5, &c.

EXEMPLE I. Soit l'équation $y^3 x.(y - x)^2 - a^3.(y + x)^3 + a^6 = 0$. Voyons d'abord ce que donne le facteur triple qui se trouve dans le premier membre P. Divisant par $M = x.(y - x)^2$, on a $y^3 - \frac{a^3.(y + x)^3}{x.(y - x)^2} + \frac{a^6}{x.(y - x)^2} = 0$. Il est évident qu'en faisant $x = \infty$, le dernier terme disparoît devant le second; donc l'équation a lieu seulement entre les deux premiers termes : or cette équation ne peut avoir lieu, à moins que y ne soit fini *, & par conséquent ne disparoisse devant x.

* En supposant y & x d'un même ordre ∞, l'on aura $y - x = d$, $(y - x)^2 = d^2$, quantité finie, ou infiniment petite du second ordre ; donc le second terme sera un infini du second ou du quatrieme ordre, le premier étant un infini du troisieme ; si on suppose y d'un ordre infini inférieur à x, le second terme devient fini, le premier étant

Mais dans ce cas le second terme se réduit à $\frac{-a^3x^3}{x^3}$ $= -a^3$; donc $y^3 - a^3 = 0$, équation qui n'a qu'une seule valeur réelle, $y = a$, qui désigne une asymptote rectiligne parallele aux abscisses. Ayant décrit le quarré $a\,b\,c\,d$, dont le côté $= a$, prenons les abscisses sur la ligne $a\,b$ (fig. 16) prolongée s'il le faut, & les ordonnées paralleles à $c\,a$. La ligne $c\,d$ prolongée sera l'asymptote de la Courbe. Pour connoître le genre de l'asymptote par la méthode donnée ci-dessus, supposons $y - a = u$, ou $y = a + u$; donc il est évident que u sera infiniment petit, lorsque x sera $= \infty$. Ayant fait la substitution, je trouve $u^3 + 3\,a\,u^2 + 3\,u\,a^2 + a^3 - \frac{a^3.(u+a+x)^3}{x.(u+a-x)^2} + \frac{a^6}{x.(u+a-x)^2} = 0$. Mais parce que u est infiniment petit & que a disparoît devant $x = \infty$, on aura $u^3 + 3au^2 + 3aau + a^3 - a^3 + \frac{a^6}{x^3} = 0$; donc les deux premiers termes disparoissant devant le troisieme (à cause de u infiniment petit), l'on aura $u = -\frac{a^4}{3x^3}$; donc l'asymptote est du genre $\frac{1}{\infty^3}$, ayant deux branches f & p correspondantes à la même asymptote rectiligne $f\,d\,p$, l'une du côté des u positifs, l'autre du côté des u négatifs. On pourroit trouver la même chose plus facilement par cette méthode. En ne négli-

infini. Si y est supposé infini d'un ordre supérieur à celui de x, le second terme devient infiniment plus petit que le premier; donc pour que l'équation subsiste entre les premiers termes, il faut supposer y fini.

geant pas le dernier terme, l'équation seroit $y^3 - a^3 + \frac{a^6}{x^3} = 0$, ou $(y-a).(y^2+ay+a) = -\frac{a^6}{x^3}$, ou $y - a = \frac{-a^6}{(y^2+ay+a).x^3}$. Mais lorsque $y = a$, l'on a $y^2 + ay + a^2 = 3a^2$; donc $y - a = u = \frac{-a^4}{3x^3}$ comme ci-dessus.

Voyons à présent ce que donne le facteur x de P. Il faut regarder x comme l'ordonnée & y comme l'abscisse. Faisant la division par $= y^3.(y-x)^2$, l'on a $x - \frac{a^3.(y+x)^3}{y^3.(y-x)^2} + \frac{a^6}{y^3.(y-x)^2} = 0$. En supposant $y = \infty$ (il est bon de se rappeller que y est représenté par x & réciproquement), le dernier terme disparoît devant le second & x devient infiniment petit; donc $x = \frac{a^3}{y^2} = \frac{a^3}{\infty^2}$, qui donne une asymptote hyperbolique du genre $\frac{1}{\infty^2}$; il y aura donc deux branches infinies g, h du côté des x positifs, c'est-à-dire du côté de ab, correspondantes à l'axe des y, qui est une asymptote rectiligne.

Enfin pour déterminer quelles branches désigne le facteur double $(y-x)^2$; il faut mener la ligne ad * & trouver l'équation qui résulte en prenant les abscisses sur cette ligne. Supposons donc que les abscisses prises sur ad soient $= t$, les ordonnées

---

* Car supposant $(y-x)^2 = 0$, l'on a $y - x = 0$, ou $y = x$, équation à une ligne droite ad, qui fait avec l'axe des abscisses ab un angle de 45° : car faisant $ab = x$, on a $bd = y = x$.

perpendiculaires ſur ad étant $= u$. Cela poſé à cauſe de l'angle $bad = 45°$, l'on a (26.) $t = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$ & $u = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$; donc $y = \frac{t+u}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$ * ; donc faiſant les ſubſtitutions, l'on aura $\frac{(u+t)^3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(t-u)}{\sqrt{2}} \cdot 2u^2 - a^3 t^3 \cdot 2\sqrt{2} + a^6 = 0$, ou $(u+t)^3 \cdot (t-u) \cdot u^2 - 4\sqrt{2} \cdot a^3 t^3 + 2a^6 = 0$; donc $u^2 - \frac{4\sqrt{2} \cdot a^3 t^3}{(u+t)^3 \cdot (t-u)} = 0$, en négligeant le dernier terme qui diſparoît devant le ſecond ; donc puiſque u doit être infiniment petit par rapport à t, l'on aura $u^2 = \frac{4\sqrt{2} \cdot a^3}{t}$; donc l'aſymptote eſt hyperbolique & du genre $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$; donc on aura deux branches infinies k, i du côté des t poſitifs, entre leſquelles ſe trouvera l'aſymptote rectiligne, c'eſt-à-dire, l'axe des t. La Courbe a donc ſix branches infinies & trois aſymptotes du genre $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$.

Quant à la figure des Courbes dans un eſpace fini, c'eſt de quoi il n'eſt pas maintenant queſtion.

EXEMPLE II. Soit l'équation $y^3 \cdot x^2 \cdot (y-x) -$

* En effet ſi dans les équations $t = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$, $u = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$, on fait diſparoître la fraction, ſi on ajoute enſuite ces équations & qu'on retranche après cela la ſeconde de la premiere, on trouvera aiſément les équations dont il s'agit.

$xy.(y^2 + x^2) + 1 = 0$. Le facteur $y - x$ de P donne une asymptote rectiligne ba (fig. 17.), qui fait un angle demi-droit avec l'axe df des abscisses, transférant l'équation en prenant les abscisses sur ab, on trouvera $u = \frac{2}{t}$, asymptote hyperbolique qui fait voir que la Courbe a deux branches infinies bq, mc. Le facteur x^2 en prenant pn pour l'axe des abscisses, ce qui donne $y = t$ & $x = u$, fournit deux équations $u = \frac{1}{t}$, $u = \frac{1}{t^3}$. La premiere donne deux branches Pq, ok, la seconde deux branches ph, ti. Le facteur y^3 doit être rapporté à l'axe des x, & l'on a $t = x$, $y = u$; donc on trouvera l'équation (A) $- t^3 u^3 + t^2 u^4 - t^3 u - t u^3 + 1 = 0$, qui en faisant $t = \infty$, devient $t^3 u^3 + t^3 u = 0$, ou (en divisant par t^3) $u^3 + u = 0$, ou $u.(u^2 + 1) = 0$, qui donne $u = 0$, les racines $u = \pm\sqrt{-1}$ de l'équation $u^2 + 1 = 0$ étant imaginaires. L'équation $u = 0$ donne une asymptote rectiligne qui se confond avec l'axe df. Substituant la valeur de u dans l'équation A, en regardant u comme infiniment petit ou comme o, & supposant $t = \infty$, il est visible que $u^3 = \frac{1}{\infty^3}$, $u^4 = \frac{1}{\infty^4}$; donc l'équation deviendra $- t^3 u + 1 = 0$, d'où l'on tire $t^3 u = 1$, & $u = \frac{1}{t^3}$, qui désigne une asymptote hyperbolique, à laquelle répondent deux branches infinies dx, fs; la Courbe a donc huit branches infinies *.

* Je n'ai pas détaillé le Calcul, qui n'a rien de difficile, je le laisse à faire aux Commençans.

REMARQUE. Les asymptotes paraboliques sont désignées par une équation de cette forme $y^{m+n} = px^n = a^m x^n$, en faisant $p = a^m$; & les hyperboliques par l'équation $y^m = \frac{p}{x^n} = \frac{a^{m+n}}{x^n}$, en faisant de même $p = a^{m+n}$.

Diviser les Lignes algébriques d'un même ordre en especes.

38. De ce que nous venons de dire on peut tirer la méthode de diviser les lignes d'un même ordre en especes. Soit l'équation $y^2 + (lx + n) y + mx^2 + fx + q = 0$. Cette équation peut représenter toutes les lignes du second ordre, si on excepte le cas où y manque dans l'équation *. Dans ce cas la Courbe est une hyperbole, à moins que l'on ne parvienne à une équation de cette forme $xy = 0$, alors l'équation résulte de la combinaison de deux lignes droites. Lorsque le premier membre P de l'équation, c'est-à-dire, $y^2 + lxy + mx^2$, est résoluble en deux facteurs égaux, il en résulte une parabole comme nous l'avons déja dit (12.) & comme on le trouve aussi par notre méthode. Si les facteurs de P sont réels & inégaux, il en résulte une hyperbole; or par notre méthode on trouve la même chose. Enfin si les facteurs de P sont imaginaires; en faisant $x = \infty$, l'équation ne fournit aucune asymptote possible; donc il n'y a que trois especes de lignes du second ordre, la *Parabole*, l'*Hyperbole* & l'*Ellipse*, en y comprenant le *Cercle*, qui n'est qu'une Ellipse dont les axes sont égaux.

39. Venons maintenant aux lignes du troisieme ordre. L'équation générale des lignes de cet ordre est $ay^3 + (bx + c) y^2 + dx^2y + fxy + gy + hx^3 + lx^2 + mx + n = 0$. Le premier membre P, c'est-à-dire, $ay^3 + by^2x + dx^2y + hx^3$ étant de dimension

* Si x^2, par exemple, manque dans l'équation, on supposera le coefficient $m = 0$, & ainsi des autres termes.

impaire, a un facteur réel ou trois *. Il y a quatre cas; dans le premier P a un facteur réel; si les trois facteurs sont réels & inégaux, c'est le second cas. Si deux de ces facteurs sont égaux, on à le troisieme cas; & le quatrieme, lorsque les trois facteurs sont réels & égaux. Nous n'examinons pas le cas dans lequel P seroit $=0$, parce que dans ce cas l'équation deviendroit du second degré & la courbe seroit seulement du second ordre. Parce que dans chaque cas il suffit de faire le calcul pour un seul facteur, soit ce facteur $Ay - Bx$ qui donne une asymptote rectiligne: en effet faisant $Ay - Bx = 0$, l'on a $Ay = Bx$, d'où l'on tire $B : A :: x : y$; donc l'asymptote fera avec la ligne des abscisses un angle dont le cosinus $= B$, le sinus $= A$, & par conséquent la tangente $= \frac{rA}{B}$. Si on rapporte la courbe à cette ligne en faisant les abscisses $= t$ & les ordonnées perpendiculaires $= u$, on trouvera une équation de cette forme $at^2u + btu^2 + cu^3 + dt^2 + etu + fu^2 + gt + hu + m = 0$ (A).

Le premier membre P de cette équation $at^2u + btu^2 + cu^3$ a un facteur réel u. Supposons qu'il n'en ait pas d'autre, ce qui arrive si après avoir divisé P par u le quotient $at^2 + btu + cu^2$, n'est pas résoluble en facteurs réels, ou si $t^2 + \frac{b}{a}tu + \frac{c}{a}u^2$ n'est pas résoluble en facteurs réels, ou si $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ est une quantité positive, ou si $b^2 < 4ac$. Si dans P on suppose $t = \infty$, l'équation subsiste entre les membres P & Q & devient dans cette supposition, $at^2u + dt^2 = 0$, d'où l'on tire (en transposant & divisant par at^2) $u = -\frac{d}{a} = a'$, en faisant $-\frac{d}{a} = a'$. L'équation $u = a'$ désigne une asymptote droite. Pour en connoître l'espece on fera $u - a' = y$,

* Considérant cette quantité comme une équation du troisieme degré, dont y est l'inconnue, il est visible qu'elle doit avoir une ou trois racines réelles, & par conséquent un ou trois facteurs réels; ce qui a lieu de même en considérant x comme l'inconnue.

ou $u = y + a'$, & substituant cette valeur de u * on trouvera par la méthode ci-dessus une équation de cette forme $y = \frac{p}{t}$, ou de celle-ci $y = \frac{p}{t^2}$, selon que le coefficient de t ne sera pas, après la substitution, égal à o, ou sera = o.

Donc la premiere espece des lignes du troisieme ordre a une asymptote droite de l'espece $u = \frac{p}{t}$.

La seconde espece a une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$.

On a changé y en u, ce qui est permis.

SECOND CAS. Si P a trois facteurs réels & inégaux, chacun de ces facteurs fournira donc aussi deux asymptotes, l'une de l'espece $u = \frac{p}{t}$, l'autre de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$. Ce cas produit quatre especes de lignes du troisieme ordre, qui ont trois asymptotes droites inclinées l'une à l'autre, ces especes sont :

La troisiéme espece a trois asymptotes de l'espece $u = \frac{p}{t}$.

La quatrieme espece a deux asymptotes de l'espece $u = \frac{p}{t}$ *& une de l'espece* $u = \frac{p}{t^2}$.

La cinquieme espece a une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$ *& deux de l'espece* $u = \frac{p}{t^2}$.

La sixieme espece a trois asymptotes de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$.

En examinant si toutes ces especes sont possibles, l'on trouvera que la cinquieme ne l'est pas, parce que parmi trois asymptotes, deux ne peuvent point être de l'espece $u = \frac{p}{t}$, sans que la troisieme le soit de même ; de sorte que la sixieme espece doit être mise à la place de la cin-

* Il est aisé de voir qu'à l'infini y doit être regardé comme infiniment petit.

quieme. Pour faire cet examen, on pourra se servir de l'équation $y.(Ay - Bx).(cy - dx) + exy + fy^2 + gx + hy + i = 0$ *, dont le premier membre contient trois facteurs réels. Si l'on transforme cette équation en substituant les valeurs de x & y trouvées ci-dessus (26), & faisant $\sqrt{(a^2 + b^2)} = 1$, ce qu'on peut toujours faire, on verra que le facteur y peut fournir une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$, & qu'il en est de même de chacun des deux autres facteurs; que les trois facteurs peuvent fournir chacun une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$, que deux peuvent fournir une asymptote chacun de l'espece $u = \frac{p}{t}$, l'autre donnant une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$, mais qu'il n'est pas possible que deux donnent une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$, sans que l'autre en donne une de la même espece. Ainsi *la cinquieme espece a trois asymptotes de l'espece* $u = \frac{p}{t^2}$.

Passons au troisieme cas. Si P a un facteur double y^2, ce qui arrive lorsque yx^2 ni x^3 ne se trouvent pas dans l'équation, tandis que y^2x & y^3 s'y trouvent, ou l'un des deux seulement, dans ce cas P aura un autre facteur de cette forme $ay - bx$ qui donnera une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t}$, ou de la forme $u = \frac{p}{t^2}$. Le facteur y^2 peut aussi donner une asymptote de l'espece $u^2 = pt$, de-là naissent deux especes de lignes du troisieme ordre.

La sixieme espece a une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$ *& une asymptote de l'espece* $u^2 = pt$.

* Cette équation, quoique ne contenant pas x^2, peut néanmoins servir à notre objet & elle est très-étendue. Si on substitue les valeurs de y & de x en t, u & constantes, la transformée contiendra t^2 dégagé de u; & l'omission du terme affecté de x^2 ne peut rien changer à nos conclusions.

La septieme espece a une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t^2}$ *& une asymptote palabolique de l'espece* $u^2 = pt$.

Il peut arriver que le premier facteur donne une seule asymptote de l'ordre $u = \frac{p}{t}$, ou de l'ordre $u = \frac{p}{t^2}$, le facteur double n'en donnant aucun. De-là naissent deux especes de lignes du troisieme ordre.

La huitieme espece a une seule asymptote de la forme $u = \frac{p}{t}$.

La neuvieme espece a une seule asymptote de la forme $u = \frac{p}{t^2}$.

Il peut se faire aussi qu'on ne trouve qu'une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$, ou de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$ avec deux asymptotes paralleles de l'espece $u = \frac{p}{t}$, ce qui fournit encore deux especes de lignes.

La dixieme espece a une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t}$, *& deux asymptotes paralleles de l'espece* $u = \frac{p}{t}$.

La onzieme espece a une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t^2}$, *& deux asymptotes paralleles de l'espece* $u = \frac{p}{t}$.

Outre une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$, ou de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$ on peut encore trouver une asymptote de l'espece $u^2 = \frac{p}{t}$, ce qui donne encore deux nouvelles especes de lignes du troisieme ordre.

La douzieme espece a une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t}$, & une de l'espece $u^2 = \frac{p}{t}$.

La treizieme espece a une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$, *& une de la forme* $u^2 = \frac{p}{t}$.

Dans le quatrieme cas enfin P a un facteur triple, & l'équation peut avoir cette forme $Ay^3 + bx^2 + cyx + dy^2 + fx + gy + m = 0$. Si le membre Q se trouve dans l'équation, c'est-à-dire, si b n'est pas $= 0$, en faisant $x = \infty$, l'équation qui subsiste entre P & Q donne $y^3 = px^2$, ce qui donne une nouvelle espece de lignes du troisieme ordre.

La quatorzieme espece a une asymptote parabolique de la forme $u^3 = pt^2$.

Si x^2 manque on aura $Ay^3 + cyx + dy^2 + fx + gy + m = 0$ (H). Supposons que c n'est pas $= 0$, dans ce cas l'équation H donne les deux suivantes. $Ay^3 + dxy = 0$, $dxy + fx = 0$, en supposant $x = \infty$. La premiere donne $y^2 = px$, asymptote parabolique ; la seconde donne $y = d'$, asymptote rectiligne. Faisant $y - d' = u$, ou $y = u + d'$, substituant dans l'équation H cette valeur de y & changeant x en t, on trouvera une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$.

La quinzieme espece a une asymptote parabolique de l'espece $u^2 = pt$, & une de la forme $u = \frac{p}{t}$.

Il n'est pas difficile de voir que l'axe de la parabole est parallele à l'asymptote droite.

Si $c = 0$, on a l'équation $Ay^3 + dy^2 + fx + gy + m = 0$, dans laquelle on ne peut pas supposer $f = 0$; autrement on n'auroit aucune abscisse, ni par conséquent aucune courbe. Faisant $x = \infty$, il est évident que y doit être infini, autrement l'équation ne pourroit pas subsister ; donc l'équation doit avoir lieu entre les termes Ay^3 & fx, tous les autres s'évanouissant ; donc $y^3 = px$, d'où l'on tire la seizieme espece des lignes du troisieme ordre.

La seizieme espece a une asymptote parabolique de l'espece $u^3 = pt$.

Nous laissons le détail du Calcul aux Commençans qui pourront s'y exercer avec fruit. Pour leur faciliter ce travail, nous allons exposer les équations générales dont on peut tirer chaque espece.

Pour la premiere espece. $y(x^2 - 2mxy + n^2y^2) + ay^2 + bx + cy + d = 0$, en supposant $m^2 > n^2$ & que b n'est pas $= 0$.

Pour la seconde espece. $y(x^2 - 2mxy + n^2y^2) + ay^2 + cy + d = 0$: en supposant $n^2 > m^2$.

Pour la troisieme espece. $y(x - my).(x - ny) + ay^2 + bx + cy + d = 0$, en supposant que m n'est pas $= n$, ni $b = 0$, ni $mb + c + \frac{a^2}{(m-n)^2} = 0$, ni $nb + c + \frac{a^2}{(m-n)^2} = 0$.

Pour la quatrieme espece. $y(x - my).(x - ny) + ay^2 + cy + d = 0$. Dans cette équation on ne doit pas avoir $m = n$, ni $c + \frac{a^2}{(m-n)^2} = 0$.

Pour la cinquieme espece. $y(x - my).(x - ny) + ay^2 - \frac{a^2 y}{(m-n)^2} + d = 0$, m n'étant pas $= n$.

Pour la sixieme espece. $y^2(x - my) + ax^2 + bx + cy + d = 0$; pourvu que l'on n'ait pas $a = 0$, ni $2m^3a^2 - mb - c = 0$.

Pour la septieme espece. $y^2(x - my) + ax^2 + bx + m(2m^2a^2 - b)y + d = 0$, a n'étant pas $= 0$.

Pour la huitieme espece. $y^2(x - my) + b^2x + cy + d = 0$; si l'on n'a pas $b = 0$, ni $c = -mb^2$.

Pour la neuvieme espece. $y^2(x - my) + b^2x - mb^2y + d = 0$; si b n'est pas $= 0$.

Pour la dixieme espece. $y^2(x - my) - b^2x + cy + d = 0$; c n'étant pas $= mb^2$, ni $b = 0$.

Pour la onzieme espece. $y^2(x - my) - b^2x + mb^2y + d = 0$; pourvu que l'on n'ait pas $b = 0$.

Pour la douzieme espece. $y^2(x - my) + cy + d = 0$; c n'étant pas $= 0$.

Pour la treizieme espece. $y^2(x - my) + d = 0$.

Pour la quatorzieme espece. $y^3 + ax^2 + bxy + cy + d = 0$; a n'étant pas $= 0$.

Pour la quinzieme espece. $y^3 + bxy + cx + d = 0$; b n'étant pas $= 0$.

Pour la seizieme espece. $y^3 + ay + bx = 0$, en supposant que b n'est pas $= 0$.

M. Newton, dans l'énumération des lignes du troisieme ordre, a fait attention à la figure de la Courbe dans un espace fini ; aussi a-t-il multiplié considérablement les especes

de ces Courbes *. Nous avons mieux aimé traiter cette matiere d'après le savant Euler. Si l'on veut connoître les différentes figures de ces Courbes dans un espace fini, il sera bon d'appeller *genre* ce que nous avons appellé *espece*, en nommant *especes* les variations notables qui peuvent arriver à ces Courbes dans un espace fini. On peut voir maintenant comment on doit s'y prendre pour avoir les genres des Courbes du quatrieme, cinquieme, &c. ordre. La matiere est vaste, mais elle est plus curieuse qu'utile.

Seconde méthode pour trouver les asymptotes des Courbes.

40. Cette méthode est fondée sur la nature du *quarré algébrique*, dont nous parlerons bientôt.

PROBLÊME. *Etant données deux quantités de la forme* $a x^m$, $b y^t$ *qu'on suppose du même ordre* m, *trouver une autre quantité* $c x^n y^p$ *qui soit du même ordre que les premieres & qui ait un exposant* p. Supposons $y = c x^n$, ou $y = x^n$: car le coefficient constant c ne peut changer l'ordre de x, auquel on fait ici seulement attention; donc $y^t = x^{nt}$ & $by^t = b x^{nt}$; donc $a x^m$ est du même ordre que $b x^{nt}$; donc $n t = m$. Car les coefficiens constans & finis b & a ne changent point l'ordre de ces quantités; donc pour qu'une quantité soit du même ordre que l'autre, il faut qu'une des variables soit telle que sa valeur étant exprimée par une puissance de l'autre variable & substituée à la place de cette variable, il en résulte la même variable avec le même exposant. Supposons maintenant $a x^m = d b y^t$, ou $y^t = \frac{a}{db} x^m = g^t x^m$; donc

* M. Newton auroit pu, en suivant sa méthode, trouver un plus grand nombre d'especes qu'il n'a fait.

$y =$

$y = g x^{\frac{m}{t}}$ & $y^p = g^p x^{\frac{mp}{t}}$. Substituant cette valeur de y^p dans $c x^n y^p$, on a $g^p x^{n+\frac{mp}{t}} = c x^n y^p$; or cette quantité est supposée du même ordre que $a x^m$; donc $m = n + \frac{mp}{t}$. Multipliant tout par t & transposant, il vient $mp = mt - nt$, d'où l'on tire (en divisant par m) $p = t - \frac{nt}{m}$. Si $n = 2$, $t = 10$, $m = 5$, p sera $= 10 - 4 = 6$, & l'on aura $a x^m$, $b y^t$, $c x^n y^p$, ou $a x^5$, $b y^{10}$, $c x^2 y^6$ du même ordre. En effet, de l'équation $y^p = g^p x^{\frac{mp}{t}}$, on tire $y^6 = x^3$ (en négligeant les coefficiens constants), ou $y^2 = x$. Substituant cette valeur de y^2 l'on a $a x^5$, $b x^5$, $c x^5$, quantités du même ordre. En général pourvu que l'exposant p de y soit $= t - \frac{nt}{m}$, la troisieme quantité sera du même ordre que les deux premieres.

COROLLAIRE I. Si sur $ab = m$, on éleve la perpendiculaire $ac = t$ (fig. 18.), prenant $ad = fp = n$, $ap = fd = p$; les triangles cab, cpf semblables à cause des paralleles pf, ab, donneront $ab : ac :: fp : pc$, ou $m : t :: n : pc = \frac{nt}{m}$; donc $ap = p = ac - cp$ est $= t - \frac{nt}{m}$; donc si dans la quantité $c x^n y^p = c x^{ad} y^{ap}$ *, on met

* Quoique ad & ap soient des lignes, nous les regardons comme des exposants, parce que rien n'empêche de représenter des nombres par des lignes.

$t - \frac{nt}{m}$ au lieu de p elle sera du même ordre que les quantités ax^{ab}, by^{ac}.

COROLLAIRE II. Puisque le point f est déterminé par $cx^{ad}y^{ap}$ qu'on suppose du même ordre que ax^{ba}, by^{ac}, le point g sera aussi déterminé par $dx^{ah}y^{ai}$ en supposant cette quantité du même ordre que les précédentes ; or la position de la droite bc ne dépend que des points g & f ; donc tous les points situés sur bc détermineront des quantités du même ordre.

REMARQUE. Si m étoit négative, on prendroit le point b sur le prolongement aB de cette ligne, & si t étoit négatif on prendroit le point c sur aC, &c.

41. Passons maintenant à la construction du quarré algébrique ou analytique. Divisez en parties égales les côtés d'un quarré (fig. 19), & tirant par les points de division les lignes que représente la figure, écrivez à la marge les différentes puissances de x & y comme vous le voyez *, & vous aurez une figure que nous appellerons *quarré algébrique* ou bien *quarré analytique*. Cela fait, chaque quantité cx^3y^5 sera déterminée par la rencontre des lignes, dont l'une va de x^3 situé à la partie supérieure du quarré à x^3 situé à la partie inférieure, l'autre ligne étant terminée aux deux côtés du quarré en y^5 & ainsi des autres. C'est pourquoi on pourra placer dans le

* On peut pour cela se servir d'une tablette de bois peinte en noir, en écrivant à la marge avec un poinçon les x & les y avec leurs exposans. On pourra se servir de blanc d'Espagne pour écrire ce qu'on veut effacer, ou bien marquer avec des épingles la position des points.

quarré algébrique tous les termes d'une équation qui ne passera pas le sixieme degré, en se souvenant de placer le terme constant au point déterminé par $x^0 y^0$ *. Si l'équation étoit d'un degré plus élevé, l'on augmenteroit le quarré, afin de pouvoir placer x^7, x^8, &c. y^7, y^8, &c. Si l'équation contenoit $x^{\frac{1}{2}} y^{\sqrt{2}}$, parce que $\sqrt{2} = 1.41$ à-peu-près, on placeroit ce terme au concours des deux paralleles, dont l'une passeroit par le milieu de la division qui sépare x^1 & x^0, & l'autre par la ligne qui va de y^2 à y^1, mais un peu plus près de y^2 que de y^1, parce que 1.41 est un peu plus petit que $1 + \frac{1}{2}$. Au reste une petite erreur n'est pas ici de conséquence. Pour placer cy, on fera attention que $cy = cx^0 y^1$. De même pour placer bx, par exemple, on remarquera que bx est $= by^0 x^1$. Il est visible qu'en supposant $x = \infty$, si l'on prend x^3, par exemple, tous les termes du rang horizontal situés à la gauche de x^3 disparoîtront; mais au contraire tous ceux de la droite s'évanouiront, si x est $= \frac{1}{\infty}$. De même faisant $y = \infty$ & prenant y^3, par exemple, tous les termes y^2, y^1, &c. situés au-dessous disparoîtront, au contraire tous les termes situés au-dessus de y^3 doivent s'évanouir, en supposant $y = \frac{1}{\infty}$.

42. **Problême.** *Etant donnée une équation entre x & y, trouver la valeur d'une des inconnues en supposant l'autre infinie ou infiniment petite.* Soit l'équation

$$\begin{aligned} &ax^2y^5 - cxy^4 + fx^3y^3 + ky^2 + my + q = 0. \\ &-bx^3y^5 + ex^3y^4 + gx^2y^3 - lx^3y^2 - nxy \\ &\qquad\qquad\qquad + hx^4y^3 \qquad\qquad - px^2y \end{aligned}$$

* Il s'agit ici des équations à deux inconnues.

En l'appliquant ſur le quarré algébrique, l'ordre des points ſera celui qu'on voit dans la figure, & joignant tous les points extérieurs par des lignes, on aura un polygone dont le périmetre eſt concave vers l'intérieur. Suppoſant maintenant $x = \infty$, on prendra la partie du périmetre dont la concavité eſt tournée vers la gauche, l'autre partie diſparoiſſant dans ce cas, & l'on aura l'équation $-bx^3y^5 + hx^4y^3 - lx^3y^2 - px^2y + q = 0$, qui contient cinq valeurs de y, & par conſéquent autant que la propoſée. Pour les trouver nous partagerons l'équation en d'autres plus ſimples, indiquées par les côtés du périmetre de la figure.

I. $-bx^3y^5 + hx^4y^3 = 0$, ou $by^2 - hx = 0$, en changeant les ſignes & diviſant par x^3y^3.

II. $hx^4y^3 - lx^3y^2 - px^2y = 0$, ou en diviſant par x^2y, $hx^2y^2 - lxy - p = 0$.

III. $-px^2y + q = 0$, ou en changeant les ſignes $px^2y - q = 0$.

De la premiere équation on tire $y = \pm\sqrt{\frac{xh}{b}}$, de la ſeconde $y = \frac{l \pm \sqrt{(4hp + l^2)}}{2hx}$. La troiſieme donne la cinquieme racine $y = \frac{q}{px^2}$.

Si l'on ſuppoſe x infiniment petit, on prendra la partie du périmetre qui eſt concave du côté de la droite, & l'on aura l'équation $ax^2y^5 - cxy^4 + ky^2 + my + q = 0$. Pour trouver les cinq valeurs de y que contient l'équation, on la partagera en ces trois autres indiquées par les côtés du périmetre.

I. $a x^2 y^5 - c x y^4 = 0$, ou en divisant par $x y^4$, $a x y - c = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{c}{a x}$.

II. $- c x y^4 + k y^2 = 0$, ou $- c x y^2 + k = 0$; donc $k = c x y^2$, & $y^2 = \frac{k}{c x}$; donc $y = \pm \sqrt{\frac{k}{c x}}$.

III. $k y^2 + m y + q = 0$, dont les racines sont $y = \frac{-m \pm \sqrt{(m^2 - 4 q k)}}{2 k}$.

Supposant $y = \infty$, la partie du périmetre, dont la concavité, à commencer par la droite, regarde le côté inférieur du quarré, déterminera l'équation $h x^4 y^3 - b x^3 y^5 + a x^2 y^5 - c x y^4 + k y^2 = 0$. Les quatre valeurs de x que contient cette équation, de même que la proposée, se détermineront par les équations suivantes, indiquées par les côtés du périmetre.

I. $h x^4 y^3 - b x^3 y^5 = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{byy}{h}$.

II. $- b x^3 y^5 + a x^2 y^5 = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{a}{b} y^0 = \frac{a}{b}$.

III. $a x^2 y^5 - c x y^4 = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{c}{a y} = \frac{c y^{-1}}{a}$.

IV. $- c x y^4 + k y^2 = 0$, ou $c x y^2 - k = 0$, ou $x = \frac{k y^{-2}}{c}$.

Il est facile de voir que ces racines vont en décroissant de la premiere à la derniere.

Si l'on suppose y infiniment petit, la partie du périmetre qui est concave du côté supérieur du quarré, en commençant par la droite, donne

$hx^4y^3 - lx^3y^2 - px^2y + q = 0$. Les côtés du périmetre font connoître les équations suivantes.

I. $hx^4y^3 - lx^3y^2 - px^2y = 0$.

II. $-px^2y + q = 0$.

De la premiere on tire $hx^2y^2 - lxy - p = 0$, ou $x = \frac{l \pm \sqrt{(4hp + ll)}}{2hy}$.

De la seconde on tire $px^2y - q = 0$, ou $x^2 = \frac{q}{py}$, & $x = \pm \sqrt{\left(\frac{q}{py}\right)}$.

Cette méthode résulte de la nature des équations. En effet soit l'équation
$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx - abc = 0, \\ \quad\;\; - b \quad + ac \\ \quad\;\; - c \quad + bc \end{array}$$
dont les racines sont a, b, c.

Si l'on suppose a infini par rapport à b & b infini par rapport à c, l'on a l'équation $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$; d'où en joignant chaque terme avec celui qui le suit, on forme ces équations plus simples $x^3 - ax^2 = 0$, ou $x - a = 0$, ou $x = a$. En second lieu $-ax^2 + abx = 0$, d'où l'on tire $x - b = 0$, ou $x = b$; en troisieme lieu l'on a $abx - abc = 0$, ou $x - c = 0$, ou $x = c$.

REMARQUE I. On peut donc par le moyen du quarré algébrique trouver facilement les racines d'une équation à deux variables x & y, dans la supposition d'une de ces variables infiniment grande ou infiniment petite.

REMARQUE II. Les racines de l'équation réduite dans la supposition de l'une des variables infinies, ne peuvent différer des racines de la même équation non réduite, que d'une quantité évanouissante par rapport à ces mêmes racines; de sorte que si l'équation réduite donne $y = a$,

l'équation non réduite, donnant $y = a + B$, on doit conclure que B disparoît devant a. Il est évident que si a est imaginaire, la racine le sera aussi : mais si a est une quantité réelle & B imaginaire, la racine sera de même imaginaire. On ne peut donc pas savoir par l'équation réduite si la racine trouvée est imaginaire. Si B est une quantité imaginaire, on pourra toujours la réduire à la forme $c + d\sqrt{-1}$ (ainsi que le savent les Géometres). De plus l'équation, outre la racine $a + c + d\sqrt{-1}$, en aura une autre $= a + c - d\sqrt{(-1)}$, d & c étant extrêmement petits par rapport à a ; donc dans le cas de B imaginaire, l'on aura $y = a + c + d\sqrt{-1}$ & $y = a + c - d\sqrt{-1}$; donc l'équation réduite contiendra $y - a = 0$, $y - a = 0$, c'est-à-dire, sera divisible par $(y - a)^2$. Si cela n'arrive pas, la racine ne peut être imaginaire. Si cela arrive, pour savoir si elle est imaginaire lorsqu'on cherche la valeur de y dans le cas de $x = \infty$, supposons que l'équation transportée sur le quarré analytique & réduite par la méthode ci-dessus, fournisse celle-ci $(y - a)^2 = 0$, on prendra dans l'équation non réduite les quantités de l'ordre immédiatement inférieur à celui de l'équation qui a donné $(y - a)^2 = 0$: ainsi si le côté $a\,d$ du périmetre (nous appellerons ce côté une *directrice*) a donné une équation de cette forme $a x^3 y^5 - b x^4 y^3 = 0$, on prendra dans l'équation non réduite la quantité $x^3 y^4$ qui appartient à l'ordre immédiatement inférieur à celui que donne la directrice $a\,d$, & tirant par $x^3 y^4$ la directrice $p\,q$ parallele à $d\,a$ par le point le plus proche de la directrice $a\,d$, en sorte qu'aucun des termes contenus dans l'équation ne tombe entre les paralleles $a\,d$ & $p\,q$, tous les termes situés sur

$p\,q$ feront d'un ordre immédiatement inférieur à ceux de la directrice $a\,d$ *. Ajoutant les nouveaux termes à ceux de la directrice $a\,d$, l'on verra s'il en résulte encore une équation de la forme $(y-g)^2 = 0$, en faisant $a + c = g$, & c étant la quantité qu'ont donné ces nouveaux termes. Si cela arrive on cherchera une nouvelle directrice qui contienne les termes de l'ordre immédiatement inférieur à ceux de la directrice $p\,q$, on ajoutera ces nouveaux termes, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé toute l'équation, ou qu'on ait cessé de trouver une équation de la forme dont nous venons de parler.

43. PROBLÊME. *Etant donnée une équation de cette forme :* $a x^m y^n + b x^{m+t} y^{n+p} + c x^{m+2t} y^{n+2p} +$ &c. $= 0$, *dans laquelle les exposants des deux variables sont en progression géométrique croissante ou décroissante, les coefficiens* a, b, *&c. étant réels, ou* 0, *on demande de trouver la valeur de* y *pour une valeur de* x *donnée.* On peut toujours ordonner l'équation de telle sorte que les exposants de y aillent en décroissant. Il suffit, si cela est nécessaire, de renverser l'équation, en prenant le dernier terme pour le premier, le pénultieme pour le second, &c. Cela posé, supposons que n, $n + p$, $n + 2p$, &c. est une progression arithmétique décroissante; c'est-

* C'est-à-dire, qu'il n'y aura aucun ordre intermédiaire entre l'ordre de la directrice $a\,d$ & celui de la directrice $p\,q$, quoique d'ailleurs les ordres de ces directrices puissent être éloignés l'un de l'autre. Si l'ordre de la directrice $a\,d$ est le dixieme, & celui de la directrice $p\,q$ le septieme ordre : il n'y aura dans l'équation, aucun terme d'un ordre intermédiaire entre le septieme & le dixieme.

à-dire, supposons que p est négatif; divisez l'équation par $x^m y^n$, ce facteur contient une racine $y = 0$. On aura $a + b x^t y^p + c x^{2t} y^{2p} +$ &c. $= 0$. Faisons $x^t y^p = z$, substituant cette valeur de $x^t y^p$, il vient $a + bz + cz^2 + dz^3 +$ &c. $= 0$. Cherchez les valeurs de z, c'est-à-dire, les racines de cette équation, & cela par approximation si l'on ne peut les avoir autrement, & z sera supposé connu. Mais l'on a $x^t y^p = z$; donc $y^p = \frac{z}{x^t}$, ou $y = \sqrt[p]{\frac{z}{x^t}}$; donc on aura les valeurs de y, puisqu'on connoît z & que x est donné par supposition.

COROLLAIRE. Si l'on fait $\sqrt[p]{z} = a$ & $-\frac{t}{p} = q$, on aura $y = \sqrt[p]{\frac{z}{x^t}} = \frac{z^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{t}{p}}} = z^{\frac{1}{p}} x^{\frac{-t}{p}} = a x^q$, quantité imaginaire si a est imaginaire, ou si a étant réel, q est une fraction de cette forme $\frac{n}{2}$, n étant un nombre impair & x étant supposé négatif.

EXEMPLE. Soit l'équation $ay^6 + bxy^4 + cx^2y^2 + dx^3 = 0$, on aura $n = 6$, $p = -2$, $m = 0$, $t = 1$. Divisant par $y^6 = x^m y^n$, il vient $a + bxy^{-2} + cx^2y^{-4} + dx^3y^{-6} = 0$. Faisant xy^{-2}, ou $\frac{x}{y^2} = z$, il en résulte $a + bz + cz^2 + dz^3 = 0$; ce qu'on pouvoit tirer de l'autre équation en faisant $y = 1$ & $x^t = z$, & qu'il est bon de remarquer, parce qu'il en est de même dans les autres cas. Supposant maintenant z connu par le moyen de l'équation que nous venons de trouver,

nous aurons $\frac{z^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{t}{p}}} = ax^q = \frac{1}{2}x^1 = \frac{1}{2} \times 3$, en supposant $x = 9$, & $z = 4$. Il est aisé de voir que dans ax^q, la valeur de a peut n'être pas la même que dans l'équation proposée.

44. PROBLÊME. *Etant donnée une équation algébrique entre x & y, trouver la valeur de y par une série composée de x & constantes, & cela d'autant plus exactement qu'on prendra un plus grand nombre de termes.* Supposons d'abord $x = \infty$. Réduisant l'équation dans cette supposition par le moyen du quarré algébrique, on trouvera les racines y, dont les valeurs auront la forme ax^q, a étant une quantité constante quelconque, & q un exposant quelconque. Prenant une de ces racines ax^q, substituez dans l'équation, $Y + ax^q$ à la place de y; réduisez de même l'équation qui en résultera, dans la supposition de $x = \infty$ & cherchez les nouvelles racines Y. Si vous en trouvez plusieurs, prenez celle qui est du plus bas ordre. Soit donc $Y = Bx^r$. Dans la derniere équation dont les variables sont x & Y, écrivez à la place de Y la quantité $y' + Y$, ou plutôt $y' + Bx^r$, vous aurez une nouvelle équation entre x & y'. Continuez de même à substituer, en cherchant toujours la valeur du dernier y', y'', &c. substituez jusqu'à ce que vous arriviez à une quantité imaginaire, ou que la série soit finie, ou que vous ayez trouvé autant de termes que vous jugerez nécessaire pour votre objet, & vous aurez $y = ax^q + Y + y' + y''$ &c. Les quantités Y, y', &c. seront toutes d'une forme qu'on pourra exprimer par Bx^r. Si l'on suppose $x = \frac{1}{\infty}$, on réduira l'équation par le quarré analytique dans cette

même ſuppoſition, le reſte s'achevera de même.

EXEMPLE I. Soit l'équation $y^3 - xy^2 + axy + bx^2 + ab^2 = 0$, on demande y exprimé par une ſérie d'autant plus convergente que x eſt plus grand. Faiſant $x = \infty$, & appliquant l'équation au quarré algébrique, on la réduit à celle-ci $y^3 - xy^2 + bx^2 = 0$, d'où l'on tire par les directrices $y^3 - xy^2 = 0$, $-xy^2 + bx^2 = 0$. La premiere en diviſant par y^2 & tranſpoſant, donne $y = x$; la ſeconde donne $y = + \surd(bx)$ & $y = - \surd(bx)$. chaque y promet une ſérie. Pour la premiere on a $y = x = ax^1$; donc $y = Y + ax^1$. Subſtituant cette valeur à la place de y, ou pour moins d'embarras, ſubſtituant $y + ax^1$, ou $y + x$, au lieu de y dans l'équation donnée, il vient en réduiſant & faiſant $a + b = c$, il vient, dis-je, $y^3 + 2xy^2 + x^2y + axy + cx^2 + ab^2 = 0$ (D), qui dans la ſuppoſition de $x = \infty$ devient $y^3 + 2xy^2 + x^2y + cx^2 = 0$, dont les racines ſont contenues dans les équations $y^3 + 2xy^2 + x^2y = 0$, $x^2y + cx^2 = 0$, que donnent les directrices. La premiere en diviſant par y devient $y^2 + 2xy + x^2 = 0$, ou $(y + x) \times (y + x) = 0$; donc $y = -x$, racine inutile, parce qu'elle détruit le premier terme x de la ſérie; il faut donc employer l'autre équation $x^2y + cx^2 = 0$, qui en tranſpoſant & diviſant par x^2 donne $y = -c$, ſecond terme de la ſérie. Pour avoir le troiſieme on ſubſtituera $y - c$ à la place de y dans l'équation D que nous venons de traiter, & l'on aura

$$\begin{array}{l} y^3 - 3cy^2 + 3c^2y - c^3 = 0 \\ \quad + 2xy^2 - 4cxy + 2c^2x \\ \qquad\qquad + x^2y - acx \\ \qquad\qquad + axy + ab^2. \end{array}$$

Cette équation étant appliquée au quarré algébrique, fournit cette équation utile $x^2 y + 2c^2 x - acx = 0$; donc divisant par x^2 & transposant, $y = \frac{ac - 2c^2}{x}$, troisieme terme de la série $y = x - (a+b) - \frac{(a+2b):(a+b)}{x}$ &c. en mettant $a+b$ à la place de c. On peut de même trouver tant d'autres termes qu'on voudra. Mais il est facile de voir que x étant supposé fort grand, le troisieme terme est fort petit par rapport au second, & celui-ci par rapport au premier, & qu'on peut négliger les termes qui suivent le troisieme.

La seconde racine de l'équation donnée a été trouvée $= + \sqrt{bx}$, qui est le premier terme de la série qui doit représenter la seconde racine y. Ecrivons dans la proposée $y + \sqrt{bx}$ à la place de y & faisant pour abréger $b = 1$ dans l'équation donnée & dans $\sqrt{bx}$, on aura l'équation proposée $y^3 - xy^2 + axy + x^2 + a = 0$, dans laquelle substituant $y + x^{\frac{1}{2}}$ au lieu de y & réduisant, l'on a $y^3 + 3y^2 x^{\frac{1}{2}} + 3yx + x^{\frac{3}{2}} - y^2 x - 2yx^{\frac{3}{2}} + axy + ax^{\frac{3}{2}} + a = 0$. Cette équation, mise sur le quarré analytique, donne cette équation utile $x^{\frac{3}{2}} - 2yx^{\frac{3}{2}} + ax^{\frac{3}{2}} = 0$, d'où l'on tire $1 - 2y + a = 0$ & $y = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}$, ou en écrivant b à la place de 1, $y = \frac{a+b}{2}$, second terme de la série, &c. Si l'on suppose le premier terme négatif, on aura la troisieme série $y = - \sqrt{bx} + \frac{a+b}{2}$ &c.

Si dans l'équation proposée on suppose $x = \frac{1}{\infty}$, on trouvera l'équation $y^3 + ab^2 = 0$, qui n'a qu'une racine réelle $y = -\sqrt[3]{(ab^2)}$, les autres racines étant imaginaires ; ainsi $-\sqrt[3]{(abb)}$ sera le premier terme de la série. On trouvera le second en écrivant dans l'équation proposée $y - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$ à la place de y, ce qui donnera une nouvelle équation, que j'appellerai A. Appliquant l'équation A au quarré algébrique, on trouvera dans la supposition de $x = \frac{1}{\infty}$, les deux équations suivantes $3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}y - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}x - a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}x = 0$, $y^3 - 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}y^2 + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}y = 0$. Cette derniere équation divisée par y deviendra du second degré & les racines qu'elle donnera seront finies, tandis que nous cherchons une racine infiniment petite ; ainsi elle est inutile. La premiere étant divisée par $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$ donne $3b^{\frac{2}{3}}y - b^{\frac{2}{3}}x - a^{\frac{2}{3}}x = 0$; donc $y = \frac{(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}})x}{3b^{\frac{2}{3}}}$; donc en s'en tenant aux deux premiers termes, $y = -a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + \frac{(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}})x}{3b^{\frac{2}{3}}}$ à-peu-près à cause de x fort petit.

EXEMPLE II. Soit l'équation $x^3 + x^2y + ay^2 - 2a^2y + a^3 = 0$, on demande une série qui donne y d'autant plus exactement que x est pris plus petit. Appliquant cette équation au quarré algébrique, elle se réduit, dans la supposition de $x = \frac{1}{\infty}$, à cette autre équation $ay^2 - 2a^2y + a^3 = 0$, ou en divisant par a ; $y^2 - 2ay + a^2$

$= 0$, ou $(y - a)^2 = 0$; donc elle a une racine double $y = a$, $y = a$; de sorte que le premier terme des deux séries qui doivent donner les valeurs de y est a. Pour trouver les seconds termes de ces séries, je substitue $y + a$ dans l'équation proposée à la place de y, & j'ai $x^3 + x^2 y + a x^2 + a y^2 = 0$, qui dans la supposition de x infiniment petit donne, en l'appliquant au quarré algébrique, $a y^2 + a x^2 = 0$, ou $y^2 + x^2 = 0$, ou $y = \pm \sqrt{-x^2}$; donc le second terme de chacune des séries est imaginaire ; ainsi les séries sont elles-mêmes imaginaires & leur continuation est inutile.

REMARQUE. Si l'on trouve une équation de cette forme $(y - a)^n = 0$, on aura autant de séries que n contient d'unités, le premier terme de ces séries sera $= a$. Si $n = 1$, a appartiendra à une seule série, dont le premier terme & les suivants seront réels. Si $n = 2$, il peut se faire que le second ou le troisieme, &c. terme des deux séries soit imaginaire ; il faut donc opérer jusqu'à ce que l'on parvienne au terme où les deux séries se séparent l'une de l'autre, alors on trouvera deux termes, un pour chaque série, qui seront tous les deux réels ou tous les deux imaginaires. Dans le premier cas l'on peut être sûr que les séries sont réelles. Mais si les séries doivent être les mêmes, les valeurs de y étant les mêmes pour l'une & pour l'autre, il faudra continuer les séries jusqu'à la fin, afin d'être assuré qu'elles ne contiennent aucun terme imaginaire. Si $n = 3$, le premier terme des trois séries sera $= a$ & l'on continuera la série jusqu'à ce qu'on soit arrivé au terme où elle se partage en trois, ce qui ne peut se faire que par l'extraction d'une racine cubique, qui donne ou

trois racines réelles, ou deux imaginaires & une réelle; donc au moins une des trois séries sera réelle. En général il faut opérer jusqu'à ce que la série se fourche en un nombre n de séries. Mais si la série dont le premier terme est donné par l'équation $(y - a)^n = 0$, ne se fourche pas, c'est une marque qu'il y a autant de séries égales & autant de valeurs de y égales, qu'il y a d'unités dans n.

REMARQUE II. Puisque les séries qu'on cherche sont une suite de termes d'autant plus petits qu'ils s'éloignent du premier, en sorte que les ordres de ces termes sont différents, du moins en supposant l'inconnue de la suite infinie ou infiniment petite, il faudra rejetter toutes les valeurs des racines qui donneroient un terme égal, plus grand ou du même ordre que les précédents. On doit rejetter aussi les racines qui donneroient un terme qui détruiroit quelqu'un des précédents. C'est ainsi que dans le premier exemple on a rejetté $-x$ qui détruisoit le premier terme $+x$.

Passons maintenant à la recherche des branches infinies & des asymptotes des courbes. Si l'on prend une partie pp de l'abscisse ap infiniment petite (fig. 20), nous l'appellerons dx, & une partie mo de l'ordonnée, aussi infiniment petite, nous l'appellerons dy & nous ferons le sinus total $= 1$.

45. THÉOR. *La tangente de l'angle de la Courbe avec une parallele à la ligne des abscisses en un point quelconque m est $= \frac{dy}{dx}$, & la tangente de l'ange de la Courbe avec son ordonnée est $\frac{dx}{dy}$, d'autant plus exactement que les points m & i seront plus proches l'un de l'autre.* En effet la portion mi de la Courbe

ſe confond avec la portion correſpondante de la tangente Mm, d'autant plus exactement que pp eſt plus petit *; or le triangle mio rectangle en o (à cauſe de io parallele à ap & de mp perpendiculaire ſur l'axe pa : car on ſuppoſe l'angle des coordonnées droit), donne, en prenant io pour rayon, $dx = pp : dy = om :: 1 :$ tang. $mio = \frac{dy}{dx}$; donc 1°. &c. Le même triangle donne $dy : dx :: 1 :$ tang. $imo = \frac{dx}{dy}$.

COROLLAIRE. Donc ſi $\frac{dy}{dx}$ eſt $= a$, on aura $dx : dy :: 1 : a$. Si $a = 0$, l'angle mio ſera $= 0$, c'eſt-à-dire, que la Courbe eſt alors parallele à la ligne des abſciſſes : ainſi les branches de l'hyperbole vulgaire ſont cenſées à l'infini paralleles à leurs aſymptotes. On ſait auſſi que la tangente qui paſſe par l'extrêmité du petit axe de l'Ellipſe eſt parallele au grand axe.

46. PROBLÊME. *Etant donnée l'équation d'une Courbe, trouver pour chaque branche infinie de cette Courbe la valeur de y ou de x par une ſérie dont les termes aillent toujours en diminuant.* Pour les branches qui s'étendent à l'infini dans la direction de l'axe des abſciſſes, ſuppoſez $x = \infty$ & cherchez la ſérie que donne y dans cette ſuppoſition. Pour les branches qui s'étendent à l'infini

* Lorſqu'on ſuppoſe le point m infiniment proche du point i, l'angle de la Courbe avec l'ordonnée, ou avec la ligne io parallele à l'axe des x, eſt cenſé le même que celui que fait la tangente avec les mêmes lignes.

dans

dans la direction de l'axe des ordonnées, changez dans l'équation y en x & réciproquement, & cherchez ensuite la valeur de y comme pour le cas précédent.

COROLLAIRE. La série ainsi trouvée sera $y = a x^r + b x^s + c x^t +$ &c. a, b, c, &c. sont des quantités constantes & les exposants r, s, &c. doivent aller en diminuant, autrement la série ne seroit pas convergente puisqu'on suppose x au moins fort grand. Si l'on fait $x = \infty$, la série se réduit au premier terme & l'on a $y = a x^r$. Maintenant supposons qu'on augmente y de la quantité infiniment petite dy, & x de la quantité infiniment petite dx, l'on aura $a x^r = a.(x + dx)^r =$

$$a.x^r + a r x^{r-1} dx + \frac{a r (r-1)}{2} x^{r-2} (dx)^2 + \&c.$$

$= a x^r + a r x^{r-1} dx$, parce que les termes qui suivent disparoissent devant le second, à cause de dx infiniment petit; donc notre équation deviendra $y + dy = a x^r + a r x^{r-1} dx$, ou $dy = a r x^{r-1} dx$, en effaçant les quantités égales y, $a x^r$; donc $dx : dy :: 1 : a r x^{r-1}$, ce qui fait voir que si r est positif & plus grand que 1, on aura $dx : dy :: 1 : \infty$ & $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\infty} = 0$; c'est-à-dire, que dans ce cas la Courbe aura une branche qui à l'infini sera parallele à l'axe des y. Si r est $= 1$, $r - 1$ sera $= 0$ & l'on aura $dx : dy :: 1 : a x^0 = a$; donc la derniere direction de la branche cherchée ne sera ni l'axe des ordonnées, ni celui des abscisses (dans ce dernier cas l'on auroit $\frac{dy}{dx} = 0$), mais une ligne qui partant du point a fera un angle oblique avec la ligne des abscisses. Si $a = 1$, cet angle sera de 45°: car la tangente

de 45° eſt égale au rayon. Si r eſt une fraction poſitive plus petite que l'unité, $r - 1$ ſera un nombre négatif $- p$, & l'on aura $ax^{r-1} = ax^{-p} = \frac{a}{x^p}$, quantité infiniment petite; donc $dx : dy :: 1 : \frac{1}{\infty}$; donc $\frac{dy}{dx} = 0$; donc la derniere direction de la Courbe ſera parallele à l'axe des x, ce qui a lieu auſſi ſi r eſt un nombre négatif entier ou fractionnaire.

COROLLAIRE II. Soit dp l'ordonnée y de la Courbe mpn (fig. 21), on trouvera la derniere direction de la branche pn par l'équation $y = ax^r +$ &c. Soit $gd = y' = ax^r$, on décrira la branche gq par l'équation $y' = ax^r$, & la derniere direction de cette Courbe ſera la même que pour la Courbe pn; de ſorte qu'à l'infini les deux Courbes deviendront paralleles l'une à l'autre. L'intervalle gp entre les deux Courbes ſera fini, infiniment grand ou infiniment petit, ſelon que $bx^s + cx^t$ &c. ſera une quantité finie, infiniment grande ou infiniment petite. Si l'on prend deux termes de la ſérie, qu'on ſuppoſe $y'' = ax^r + bx^s$ & qu'on décrive la Courbe rs de cette équation, la branche hs s'approchera encore plus de la Courbe pn, de ſorte que rs, fq ſeront les aſymptotes curvilignes de la Courbe pn, en ſuppoſant qu'à l'infini pg & ph ſont infiniment petits. Il n'eſt pas difficile de voir ce qui arriveroit en conſtruiſant la Courbe de l'équation $y''' = ax^r + bx^s + cx^t$.

EXEMPLE I. Soit l'équation $xy - c^2 = 0$. Faiſant $x = \infty$, l'on a $y = \frac{c^2}{\infty} = 0$ (car ici on conſidere 0 comme une quantité infiniment petite),

& la série est composée d'un seul terme. Supposant $x = -\infty$, on a $y = -0$, c'est-à-dire, que la Courbe, qui est évidemment une hyperbole, a deux branches infinies, l'une du côté des abscisses positives, l'autre du côté des négatives ; & parce que la même équation donne $x = \frac{c^2 f}{y}$, il s'ensuit que la Courbe a deux autres branches infinies, dont la derniere direction est parallele à l'axe des ordonnées : ce sont là les quatre branches de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

EXEMPLE II. Soit l'équation $x^4 - x^2y^2 + a^4 = 0$. Faisant $x = \infty$ & appliquant cette équation au quarré algébrique, elle se réduit à $x^4 - x^2y^2 = 0$. En supposant $y = \infty$, elle se réduit à ces deux $x^4 - x^2 y^2 = 0$, $- x^2 y^2 + a^4 = 0$, dont la premiere est la même que celle que donne $x = \infty$. L'équation $x^4 - x^2 y^2 = 0$, donne $y^2 = x^2$, $y = + x$ & $y = - x$: ainsi $+ x$ & $- x$ sont les premiers termes des deux séries qui représentent les deux y. Pour trouver le second terme de la premiere série, on substituera dans l'équation de la Courbe $y + x$ à la place de y, & $y - x$ si l'on veut avoir le second terme de la seconde série. Dans le premier cas l'équation devient $- x^2 y^2 - 2 x^3 y + a^4 = 0$, qui par le moyen du quarré analytique se réduit à $- 2 x^3 y + a^4 = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{a^4}{2x^3}$, second terme de la premiere série. En faisant x négatif on a $y = - \frac{a^4}{2x^3}$, second terme de la seconde série. Il est inutile de chercher d'autres termes, parce que ceux-ci sont assez petits ; donc les deux séries qui répondent aux deux y sont

$x + \frac{a^4}{x^3} = y$ & $-x - \frac{a^4}{2x^3} = y$; la Courbe a donc deux asymptotes, à chacune desquelles répond une branche infinie, soit du côté des x positifs, soit du côté des négatifs. La supposition de $y = \infty$ donne l'équation $x^4 - x^2 y^2 = 0$ & $x = \pm y$. Substituant $x \pm y$ à la place de x dans l'équation proposée, on trouvera facilement que les branches de la Courbe s'étendent à l'infini dans la direction de l'axe des ordonnées, comme dans la direction de l'axe des abscisses. Si l'on néglige le second terme des séries ci-dessus parce qu'il est infiniment petit, on aura $y = x$, $y = -x$; donc les asymptotes rectilignes forment à l'origine des x un angle de 45° avec la ligne des abscisses, & ces asymptotes sont hyperboliques du genre $\frac{1}{\infty^3}$. L'équation proposée étant du quatrieme degré, cherchons les deux autres valeurs de x par l'équation $-x^2 y^2 + a^4 = 0$, ou $xy = \pm \sqrt{a^4} = \pm a^2$, d'où $x = \pm \frac{a^2}{y} = 0 \pm \frac{a^2}{y}$. Il n'est pas nécessaire de chercher d'autres termes, parce que $\frac{a^2}{y}$ est une quantité infiniment petite; car y est supposé infini; donc l'axe des ordonnées est une asymptote à laquelle, du côté des y positifs & négatifs répondent deux branches infinies.

REMARQUE I. Les séries qui contiennent des quantités imaginaires, indiquent des branches imaginaires.

REMARQUE II. Nous avons supposé l'angle des coordonnées droit, parce qu'il est toujours possible de rapporter la Courbe à un axe tel que cet angle soit droit.

Du retour des suites.

On appelle *retour des suites* la méthode qu'on suit lorsqu'après avoir trouvé dans une équation à deux inconnues la valeur de l'une des inconnues x, par exemple, par une suite qui contient dans ses termes les puissances de l'autre inconnue y, on cherche la valeur de y par une suite dont les termes contiennent les puissances de x.

47. THÉORÈME. *Si* $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ *&c., on aura* $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{(2b^2 - ac) \times x^3}{a^5} + \frac{(5abc - 5b^3 - aad) \times x^4}{a^7} +$ *&c. à l'infini.* Pour le faire voir, supposons $y = hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 +$ &c. * on aura

$$\begin{aligned}
y^2 &= h^2x^2 + 2hix^3 + iix^4 + \&c. \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + 2hkx^4 + \&c. \\
y^3 &= \qquad\quad h^3x^3 + 3h^2ix^4 + \&c. \\
y^4 &= \qquad\qquad\qquad h^4x^4 + \&c. \\
\&c. &= \qquad\qquad\qquad + \&c.
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs de y, y^2, &c. dans la valeur de x, on aura

$$\begin{aligned}
x = ahx &+ aix^2 + akx^3 + alx^4 + \&c. \\
&+ bh^2x^2 + 2bhix^3 + bi^2x^4 + \&c. \\
&\qquad\qquad\qquad + 2bhkx^4 \\
&\qquad\qquad + ch^3x^3 + 3ch^2ix^4 + \&c. \\
&\qquad\qquad\qquad + dh^4x^4 + \&c. \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \&c.
\end{aligned}$$

Afin que cette équation ait lieu, quelle que soit la

* Cette supposition est permise, parce que les coefficients h, i, &c. étant indéterminés, peuvent être supposés tels que notre équation en résulte.

valeur de x, il faut qu'on ait $x = ahx$** & que les coefficients des puissances x^2, x^3, &c. soient $= 0$; donc premiérement $x = ahx$, ou en divisant par x, $1 = ah$, & $h = \frac{1}{a}$. En second lieu on aura $aix^2 + bh^2x^2 = 0$, d'où, en divisant par ax^2, substituant la valeur de h^2 & transposant, on tire $i = -\frac{b}{a^3}$. En troisieme lieu l'on a $akx^3 + 2bhix^3 + ch^3x^3 = 0$, d'où l'on tire, en divisant par ax^3, $k = \frac{-2bhi - ch^3}{a} = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, en substituant les valeurs de i & de h & réduisant les deux termes au même dénominateur. En quatrieme lieu on a l'équation $al + bi^2 + 2bhk + 3ch^2i + dh^4 = 0$, d'où l'on tire (après avoir substitué les valeurs de h, k, i) $l = \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}$; il est facile de voir comment l'on pourroit continuer. Donc si $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ &c. on aura $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{(2b^2 - ac)x^3}{a^5} + \frac{(5abc - 5b^3 - a^2d)x^4}{a^7} +$ &c. à l'infini.

COROLLAIRE. Donc étant donnée la série $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ &c. $= p$, logarithme hyper-

** Car faisons le coefficient ah de $x = A$, celui de $x^2 = B$, celui de $x^3 = C$, celui de $x^4 = D$, &c on aura $x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$ &c. Divisant par x il vient $1 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. Si on suppose $x = 0$, cette équation devient $1 = A$; donc $Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. $= 0$, ou $Bx = -Cx^2 - Dx^3 -$ &c. ou divisant par x, $B = -Cx - Dx^2 -$ &c. $= 0$, en supposant $x = 0$; donc $B = 0$, en continuant de même on trouvera $C = 0$, $D = 0$, &c.

bolique du nombre $1+x$ (voy. les Sect. Con. n° 80), on peut trouver ce nombre exprimé par des puissances de p & par des constantes. Soit $x = hp + ip^2 + kp^3 + lp^4 +$ &c. faisant attention qu'ici $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$, &c. on a $h = 1$, $i = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2.3}$, $l = \frac{1}{2.3.4}$ &c.; donc $x = p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} + \frac{p^4}{2.3.4}$ &c. On voit assez la loi de la suite dont les termes suivants sont $\frac{p^5}{2.3.4.5}$, $\frac{p^6}{2.3.4.5.6}$ &c. donc le nombre cherché sera $1 + x = 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} + \frac{p^4}{2.3.4} + \frac{p^5}{2.3.4.5}$ &c. Si l'on suppose $p = 1$, on aura le *nombre* e, *dont le logarithme hyperbolique* est $= 1$. On aura donc $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} +$ &c. réduisant ces termes en fraction décimale & faisant l'addition, on trouvera $e = 2,7182818$ en se bornant à 7 décimales. Ce nombre se rencontre souvent dans les Calculs.

REMARQUE I. On peut exprimer un nombre par son logarithme de cette autre maniere. Soit $l.(1+x) = p$, l marque ici le logarithme hyperbolique, si on multiplie p par $1 = l.e$, c'est-à-dire, par le logarithme hyperbolique 1 du nombre e, on aura $l.(1+x) = p.l.e$; or $p\,l.e = l.e^p$ *; donc $l.(1+x) = l.e^p$ & par conséquent les nombres auxquels ces logarithmes appartiennent sont égaux, c'est-à-dire, que $1 + x = e^p$; or nous venons de voir que $1+x$

* Parce que le logarithme de 9, quarré de 3, est le double du logarithme de la racine 3, le logarithme du cube de 3 est le triple du logarithme de 3. Et en général le logarithme de e^p est $= p\,l.e$. Tout cela suit de ce que nous avons dit sur les logarithmes dans l'algebre.

$= 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} +$ &c. ; donc $e^p = 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3}$ &c. puisque $p = l.(1+x) = l.n$, faisant $1 + x = n$, on a $n = 1 + l.n + \frac{(l.n)^2}{2} + \frac{(l.n)^3}{2.3}$ &c.

REMARQUE II. Pour trouver la racine x d'une série (A) $3x - \frac{x^2}{5} + 4x^3$ &c. $= y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{4}{3}} + y^2$ en puissances de y & constantes, je cherche le plus grand commun diviseur des exposants de y, pour cela je réduis $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, 2 en fractions de même dénominateur & j'ai $\frac{3}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{12}{6}$ dont le plus grand commun diviseur est $\frac{1}{6}$; je prends $\frac{1}{6}$ pour la différence des exposants de la série cherchée (ce qu'il faut toujours faire en pareil cas); & je suppose ensuite $x = ay^{\frac{3}{6}} + by^{\frac{4}{6}} + cy^{\frac{5}{6}} + dy^{\frac{6}{6}} +$ &c.; donc j'ai

$$\left.\begin{array}{ll} x = ay^{\frac{3}{6}} + by^{\frac{4}{6}} + cy^{\frac{5}{6}} + dy^{\frac{6}{6}} + \text{\&c.} \ldots & \\ -\frac{x^2}{5} = & -\frac{a^2y^{\frac{6}{6}}}{5} - \frac{2aby^{\frac{7}{6}}}{5} - \text{\&c.} \\ 4x^3 = & 4a^3y \ \text{\&c.} \end{array}\right\} = y^{\frac{3}{6}} + y^{\frac{8}{6}} + y^{\frac{12}{6}}$$

J'égale ensuite les termes qui contiennent la même puissance de y, ce qui donne $ay^{\frac{3}{6}} = y^{\frac{3}{6}}$, d'où l'on tire $1 = a$. En second lieu j'ai $by^{\frac{4}{6}} =$

$o \times y^{\frac{4}{6}}$, parce que le second membre de l'équation proposée ne contient aucun terme dans lequel se trouve $y^{\frac{4}{6}}$; donc $b = o$. Je trouve de même $c = o$, $d - \frac{a^2}{5} = o$. De cette derniere équation je tire $d = \frac{a^2}{5} = \frac{1}{5}$ à cause de $a = 1$; de sorte que les termes de la série qui doit donner x seront $y^{\frac{5}{6}} + o + o + \frac{y^{\frac{6}{6}}}{5}$ &c. $= x$. Si dans le second membre de l'équation A, il y avoit un terme constant $= B$, on auroit supposé ce terme $= By^o$, & $x = By^o + B'y^{\frac{1}{6}} + B''y^{\frac{2}{6}} + ay^{\frac{5}{6}} + by^{\frac{4}{6}} +$ &c. en prenant toujours les exposants en progression arithmétique, & faisant la différence de ces exposants égale au plus grand diviseur commun des exposants qui ne sont pas o. En général on prend pour premier terme celui où y a le plus petit exposant. Ce que nous venons de dire a lieu soit que la série qui contient x soit terminée ou non.

Par exemple, si l'on demandoit la valeur de x dans l'équation $x^2 + y^2 - r^2 = o$, en y & constantes, on feroit $x = g + hy^2 + iy^4 +$ &c. parce que n'y ayant point de termes dans l'équation où y & x soient au premier degré, y ne doit pas se trouver dans la série; j'aurai donc

$$\begin{array}{lllll} x^2 = & g^2 & + 2ghy^2 & + h^2y^4 & \\ & & & + 2giy^4 & \&c. \\ y^2 = & & + y^2 & & \\ -r^2 = & -r^2 & & & \end{array}$$

Suppoſant le premier & le ſecond membre égaux à o, & faiſant = o tous les termes où y a le même expoſant, en ſe ſouvenant que $g^2 = g^2 y^0$, $r^2 = r^2 y^0$, on aura $g^2 = r^2$ & $g = r$; l'on aura en ſecond lieu $2ghy^2 + y^2 = 0$, ou $2hg + 1 = 0$, $2gh = -1$, $h = -\frac{1}{2g} = -\frac{1}{2r}$. De plus on a $hh + 2gi = 0$, d'où, en ſubſtituant les valeurs de g & de h, on tire $i = -\frac{1}{8r^3}$, & ainſi de ſuite; de ſorte qu'on aura $x = r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3}$ &c. Si la nature du Problême permet de ſuppoſer $y = 3$, par exemple, on aura $x = r - \frac{9}{2r} - \frac{81}{8r^3}$ &c.

REMARQUE III. Afin que ces ſortes de ſéries ſoient utiles, il faut que l'inconnue qui ſe trouve dans leurs termes ſoit aſſez petite pour que les ſéries convergent. Si dans le dernier exemple r eſt $> y$, la ſérie convergera. Mais ſi r étoit $< y$, dans ce cas on chercheroit une ſérie dont les termes fuſſent affectés des puiſſances de r au numérateur, en faiſant $x = g + hr^2 + ir^4$ &c. En général les ſéries ſeront d'autant plus utiles qu'elles convergeront plus rapidement. Si les x & les y ſe trouvoient multipliés l'un par l'autre, en ſorte qu'on eût $y^3 x^2 - 5x^3 y + 10xy = 0$, dans ces ſortes de cas on pourroit trouver les ſéries, en appliquant l'équation au quarré analytique, & ſuppoſant une inconnue infiniment petite (c'eſt celle qui doit entrer dans la ſérie), ainſi qu'on l'a vu ci-deſſus. Mais ſi l'inconnue qui doit affecter la ſérie étoit ſuppoſée fort grande, il faudroit, par le moyen du quarré algébrique, chercher une ſérie dans laquelle les

expoſans de cette inconnue allaſſent en diminuant, ce qui ſe feroit en appliquant l'équation (que nous ſuppoſons ne contenir qu'un nombre fini de termes) au quarré analytique & regardant cette inconnue comme infinie ; mais il eſt temps de revenir aux Courbes.

Des diametres & du centre des Courbes.

48. Toutes les Sections Coniques ont au moins un *diametre abſolu* (c'eſt une ligne perpendiculaire à ſes ordonnées, & qui diviſe la Courbe en parties égales & ſemblables) : L'Ellipſe en a deux, mais le cercle en a une infinité. Pour trouver les Courbes qui ſont dans le même cas, ſuppoſons l'eſpace diviſé en quatre parties par les lignes ab, Ff (fig. 22) qui ſe coupent perpendiculairement en c, & que les co-ordonnées ſoient perpendiculaires l'une à l'autre. En prenant les x & les y poſitifs, l'on aura la portion de la Courbe ſituée dans l'angle Fcb ou dans la région q. Suppoſant x poſitif & y négatif, on aura la portion de la Courbe ſituée dans la région r. Prenant y poſitif & x négatif, on a la portion de la Courbe de la région s, & enfin ſuppoſant les x négatifs auſſi-bien que les y, on a la portion de la Courbe ſituée dans la région t. Les portions ſituées en q & r ſeront égales & ſemblables, ſi l'équation eſt telle qu'elle reſte la même en mettant $-y$ à la place de y ; c'eſt-à-dire, ſi l'équation ne contient que des puiſſances paires de y. Mais les portions q & r pourront être égales ſans être ſemblables, ſi l'angle des co-ordonnées eſt oblique. Ce que nous venons de dire pour les portions q & r a également lieu dans le même cas pour les portions s & t qui répondent aux x négatifs ; donc toutes les Courbes repréſentées par l'équation $a + bx + cx^2 + dy^2 + ex^3 + fxy^2 + gx^4 + hx^2y^2 + iy^4$ &c. $= 0$ ſont dans ce

cas; c'est-à-dire, que ces Courbes ont un diametre ab que nous appellons *absolu*, parce que nous supposons que l'angle des co-ordonnées FcP est droit.

Si l'équation de la Courbe est telle qu'en changeant x en $-x$ & y en $-y$, elle reste la même, comme l'équation $o = a + by^2 + cy^2x^2 + dx^4y^2 + ey^4 + fx^4 + gx^6 + hy^6$ &c. qui ne contient que des puissances paires de x & de y, l'on aura toujours $PM = PN$, & prenant $cp = CP$, on aura $pm = pn = PM = Pm$; c'est-à-dire, qu'en prenant des abscisses négatives égales aux positives, les ordonnées positives & négatives seront toujours égales; il est visible aussi qu'en prenant Ff pour l'axe des abscisses, on aura toujours $VM = Vm$, $un = uN = VM$; donc en supposant l'angle des co-ordonnées droit, les lignes ab, Ff seront deux diametres absolus, & deux diametres simples si cet angle n'est pas droit *.

COROLLAIRE. Donc il n'y a que les lignes d'un ordre pair, deuxieme, quatrieme, sixieme, &c. ordre qui puissent avoir deux diametres absolus.

49. Venons au centre des Courbes. *Le centre* c d'une Courbe est un point situé sur le plan de la Courbe, auquel si d'un point quelconque M de la Courbe on mene une ligne droite Mc, en prenant le prolongement $cn = cM$, le point n sera sur la Courbe. De-là il suit qu'en prenant $cP = cp$, les ordonnées np, MP seront égales, quel que soit l'angle des co-ordonnées; parce que les triangles MPc, cnp seront toujours semblables & égaux; donc l'équation de la Courbe doit être telle qu'en changeant x en $-x$ & y en $-y$, elle

* Les diametres, dont il s'agit ici, sont tels que les abscisses de l'un sont paralleles & égales aux ordonnées correspondantes de l'autre.

reste la même ; or toute équation de degré pair ou impair, dans laquelle tous les termes de rang pair manquent, est dans ce cas ; donc toute Courbe représentée par une telle équation aura un centre ; donc la Courbe de l'équation $\begin{matrix} ay^3 + cy \\ + bx^3 + dx \end{matrix} = 0$ a un centre : car substituant $-y$ & $-x$ au lieu de $+y$ & $+x$ l'on a $\begin{matrix} -ay^3 - cy \\ -bx^3 - dx \end{matrix} = 0$, qui n'est pas différente de la premiere. En effet soit $ay^3 + bx^3 + cy + dx = p = 0$, l'on aura $-ay^3 - bx^3 - cy - dx = -p = 0$; or de ce que $+p = 0$, on déduit aisément $-p = 0$; donc, &c.

50. PROBLÊME. *Etant donnée l'équation d'une Courbe, en trouver le centre.* Soit n l'origine, nN l'axe des x & mnN l'angle des coordonnées, en sorte que les ordonnées soient paralleles à nm. Dans l'équation de la Courbe substituez $m + x$ à la place de x & $n + y$ au lieu de y. Si donc on suppose $nu = pc = m$, & $pn = cu = n$, l'origine des abscisses sera transportée en c, l'angle des coordonnées restant le même. On déterminera m & n par cette condition, que tous les termes de rang pair doivent s'évanouir dans l'équation. Si cela a lieu, la Courbe a un centre. Mais dans le cas contraire elle n'en a aucun.

EXEMPLE I. Soit la Courbe de l'équation $ay^2 - abx + bx^2 = 0$. Substituant dans cette équation $m + x$ à la place de x, & $n + y$ au lieu de y, il vient

$$\begin{matrix} ay^2 + 2any + an^2 \\ + bx^2 + 2bmx + bm^2 \\ - abx - abm \end{matrix} = 0$$

supposant $2an = 0$, $2bm - ab = 0$, la Courbe aura un centre ; car dans ce cas le second terme

disparoîtra. De l'équation $2an = 0$, on tire $n = 0$; la seconde équation donne $2m = a$, ou $m = \frac{a}{2}$. Ces équations font voir que l'axe des abscisses de la premiere équation $ay^2 - abx + bx^2 = 0$ passe par le centre de la Courbe & que sa distance à l'origine des x est $= \frac{a}{2}$. Substituant les valeurs de m & n que nous venons de trouver, il vient $ay^2 + bx^2 - \frac{1}{4}ba^2 = 0$, dans cette derniere équation l'axe des abscisses passe par le centre qui est l'origine des x.

EXEMPLE II. Soit l'équation $xy - a^2 = 0$, qui appartient à l'hyperbole rapportée aux asymptotes. L'orige des abscisses est le centre de la Courbe : car cette équation ne change pas en faisant x & y négatifs. Et en général si dans l'équation $x^m y^n - a^{m+n} = 0$, la somme des exposants $m + n$ est un nombre pair, le centre des hyperboles qui sont représentées par cette équation, sera l'origine des abscisses.

Si l'on a $x^2y - a^3 = 0$, en substituant $m + x$ à la place de x & $n + y$ au lieu de y, il vient

$$\begin{array}{l} x^2y + 2mxy + m^2y + m^2n = 0 \\ \quad + nx^2 \quad + 2mnx - a^3. \end{array}$$

Pour que la Courbe ait un centre, supposons $2m = 0$, $n = 0$, $m^2n - a^3 = 0$; c'est-à-dire, $m = 0$, $n = 0$ & $a^3 = 0$, ce qui donne $x^2y = 0$; or l'on ne peut supposer $a^3 = 0$; donc la Courbe de l'équation n'a point de centre.

De même la parabole ordinaire, qu'on peut représenter par l'équation $y^2 - ax = 0$, n'a point de centre. En effet, par les substitutions l'on trouve l'équation

$$\begin{array}{l} y^2 + 2ny + n^2 = 0, \\ \quad - ax \quad - am \end{array}$$

d'où l'on

tire $n = o$ & $a = o$, ce qui ne peut être ; & en général les paraboles représentées par l'équation générale $y^{2n} - a^{2n-1}x = o$ manquent de centre avec plusieurs autres. Mais les paraboles représentées par l'équation générale $y^{2n+1} - a^{2n}x = o$, ont toutes un centre, ce qu'on voit facilement par l'équation, qui est telle qu'elle ne change pas en substituant $-x$ à la place de x & $-y$ au lieu de y. Il n'est pas difficile de voir que le centre de ces Courbes tombe sur l'origne des abscisses.

Des Tangentes & de la courbure des Courbes.

51. Une *Tangente* est une ligne droite, qu'on peut regarder comme ayant deux points infiniment proches, communs avec la Courbe *. Soit la ligne courbe acp (fig. 23), dont l'équation entre les abscisses ab (p) & les ordonnées bc (q) est donnée, p & q sont déterminés pour chaque point c de la Courbe ; ainsi l'on doit les regarder comme constants quand il s'agit de chercher la tangente au point c. Ayant tiré une autre ordonnée dp fort proche de bc & la ligne cf parallele à l'axe des abscisses, soit $bd = cf = x$, $pf = y$. Substituant $p + x$ à la place de p, & $q + y$ à la

* Si l'on conçoit que la Tangente gc (fig. 23) se meut parallelement à elle-même en allant vers la Courbe, si peu considérable que soit son mouvement, elle rencontrera la Courbe au moins en deux points, & de plus les points de rencontre seront d'abord extrêmement proches. C'est dans ce sens qu'il faut entendre ce que nous venons de dire : savoir que la Tangente a au moins deux points infiniment proches, communs avec la Courbe lorsqu'on veut que ces points soient réellement différents l'un de l'autre.

place de y & de l'équation qui en résultera, retranchez l'équation de la Courbe entre p & q, il restera l'équation entre x & y qui ne contiendra aucun terme constant & qui sera de cette forme $ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 +$ &c. $= 0$. Les coefficients sont des fonctions de constantes (on regarde p & q comme constants); or il est visible que dans cette nouvelle équation cf est la ligne, c l'origine des abscisses & que les ordonnées sont fp. Si on suppose x infiniment petit, $pf = y$ le sera aussi, & alors tous les termes qui suivent les deux premiers disparoîtront devant ceux-là; ainsi l'équation deviendra $ax + by = 0$, * équation qui appartient à la ligne droite cp, passant par le point c. Donc cette ligne sera tangente si p & c sont infiniment proches.

Ayant prolongé pc jusqu'à la rencontre de l'axe en g, les triangles semblables pcf, cbg donnent $pf = y : cf = x :: cb : bg$; or l'équation $ax + by = 0$, ou $ax = -by$, donne $y : x :: a : -b$; donc $a : -b :: cb : bg = -\frac{b \times cb}{a}$, c'est-à-dire, que la sous-tangente $bg = t$ est $= \frac{-b \times cb}{a}$. Dès qu'on connoîtra le point g &

* Cette équation sera d'autant plus exacte que x & y seront plus petits; mais elle sera rigoureuse, si x & y sont infiniment petits ou inassignables. En effet, l'erreur quequelqu'un prétendroit en résulter étant inassignable (si cependant on peut dire qu'il y a effectivement une erreur; car on peut faire voir par les principes du Calcul différentiel qu'il n'y en a aucune), doit être regardée comme nulle. Qui pourroit en effet distinguer une erreur inassignable d'une erreur nulle, ou $= 0$?

le

le point c, la Tangente cg sera déterminée. Il suffit donc de connoître la sous-tangente bg.

52. PROBLÊME. *Déterminer la sous-tangente d'une Courbe algébrique quelconque.* Dans l'équation de la Courbe entre les coordonnées p & q, substituez $p + x$ au lieu de p, & $q + y$ au lieu de q. De l'équation qui en résultera retranchez l'équation entre p & q, ordonnez ce qui restera, de sorte que les quantités, dont l'exposant sera 1, constituent le premier terme; celles dont l'exposant sera 2, le second terme, & ainsi de suite. Egalez le premier terme à o, & de cette équation tirez le rapport entre y & x, qui est tel que $y : x :: a : -b$; la sous-tangente bg sera $t = -\frac{b \times cb}{a}$ $= -\frac{b.q}{a}$.

EXEMPLE I. Soit la parabole ordinaire, dont l'équation est $c.p = q^2$ *. Faisant les substitutions, il vient $cp + cx = q^2 + 2qy + y^2$, retranchant la premiere équation de la seconde, l'on a $cx = 2qy + y^2$. Négligeant y^2, on a $cx = 2qy$, d'où l'on tire $y : x :: c : 2q$; donc $2q = -b$ (parce que l'on a ici $c = a$) & $bg = t = -\frac{bq}{a} = \frac{2q^2}{c}$; or l'équation $c.p = q^2$ donne $\frac{q^2}{c} = p$; donc $t = 2p$, c'est-à-dire, que la sous-

* C'est la même équation que nous avons trouvée dans les Sections Coniques, avec cette différence seulement que le parametre que nous avons appellé p est ici $= c$, l'abscisse que nous avons faite $= x$ est ici $= p$, & l'ordonnée que nous avons nommée y, est ici $= q$.

tangente de la parabole eſt double de l'abſciſſe, ce que nous ſavons d'ailleurs.

EXEMPLE II. Soit la ligne du troiſieme ordre, dont l'équation eſt $xy^2 = c^2 x + c^2 y$. Changez dans cette équation x en p & y en q pour avoir $pq^2 = c^2 p + c^2 q$ (D). Subſtituant dans cette derniere équation $p + x$ au lieu de p, $q + y$ à la place de q, de l'équation qui en réſultera retranchez l'équation D, rejettant tous les termes qui ſont au-deſſus du premier degré, vous aurez $(q^2 - c^2) x = (c^2 - 2pq) y$; donc $y : x ::$ $q^2 - c^2 : c^2 - 2pq :: q : t = \frac{c^2 q - 2pq^2}{q^2 - c^2}$.

Revenons à l'équation générale par laquelle nous avons déterminé la ſous-tangente, ſavoir $ax + by = 0$. Si a eſt $= 0$, y ſera $= 0$; donc la Tangente coïncidera avec cf & ſera parallele à la ligne des abſciſſes. Si $b = 0$, x ſera $= 0$; donc la tangente ſe confondra avec pf & ſera parallele à l'axe des ordonnées. Toutes les fois que l'ordonnée bc devient plus grande ou plus petite que les ordonnées voiſines, ſituées à la droite & à la gauche du point c, il eſt néceſſaire que la Tangente devienne parallele aux abſciſſes, dans le premier cas l'ordonnée eſt appellée un *maximum*, & un *minimum* dans le ſecond cas. Cela arrive en m & m *.

* Car puiſque les ordonnées de la droite & de la gauche du point m ſont plus petites ou plus grandes que l'ordonnée qui répond au point m, la Courbe au point m ne s'approche ni ne s'éloigne de l'axe; donc la Tangente au point m réunit deux points également éloignés de l'axe; donc, &c. Si la Tangente nN eſt parallele aux ordonnées, il peut ſe faire que l'ordonnée nN (qui dans ce cas devient tangente) ſoit plus petite que ſes voiſines, il peut ſe faire auſſi que l'ordonnée nN ſoit un *maximum*, comme la

Mais on ne peut pas dire réciproquement que la Tangente étant parallele à la ligne des abscisses ou à celle des ordonnées comme il arrive en N, il en résulte un *maximum* ou un *minimum* pour l'ordonnée. Cependant si on sait d'ailleurs que la Courbe a une ordonnée plus grande ou plus petite, pour la déterminer on fera $a = 0$, ou $b = 0$. Soit l'équation de la Courbe $2c^2 y = 2x^3 + cx^2 - c^2 x$ qu'on sait avoir deux ordonnées plus grandes, l'une positive, l'autre négative. Pour les trouver, j'écris p à la place de x, & q à la place de y & j'ai $2c^2 q = 2p^3 + cp^2 - c^2 p$ (D). Je substitue dans cette équation $p + x$ au lieu de p & $q + y$ à la place de q. De l'équation qui en résulte, retranchant l'équation D, j'ai en négligeant les termes qui sont au-dessus du premier degré, $2c^2 y = (6p^2 + 2cp - c^2) \times x$; ainsi en comparant cette équation à l'équation générale $ax + by = 0$, ou $by = -ax$, j'ai $b = 2c^2$, quantité constante qu'on ne peut pas supposer $= 0$. J'ai de plus $6p^2 + 2cp - c^2 = -a$, & faisant $a = 0$, il vient $6p^2 + 2cp - c^2 = 0$, ou $p^2 + \frac{cp}{3} = \frac{c^2}{6}$. Complettant le premier mem-

figure le fait assez voir. Mais de ce que la Tangente mn (fig. 23, A) est parallele à l'axe, il ne s'ensuit pas que l'ordonnée soit un *maximum* ou un *minimum*, parce que la Courbe peut avoir un point de *flexion* en m. On appelle point de flexion le point dans lequel une Courbe de concave devient convexe ou réciproquement; & il est facile de voir que la Tangente mn peut être parallele aux abscisses, sans que les ordonnées voisines dp, Nt soient à la fois plus grandes ou plus petites que Mm; donc dans ce cas Mm ne peut être un *maximum* ni un *minimum*. Si la Courbe se fléchit en M (fig. 23), de maniere que sa tangente devienne parallele à nN, l'ordonnée TM ne sera ni un *maximum* ni un *minimum*.

bre, j'ai $p^2 + \frac{cp}{3} + \frac{c^2}{36} = \frac{c^2}{6} + \frac{c^2}{36} = \frac{7c^2}{36}$ & $p + \frac{c}{6} = \pm \sqrt{\frac{7c^2}{36}}$, ou $p = \frac{-c \pm c\sqrt{7}}{6}$. Ainsi les ordonnées qui répondent aux deux abscisses désignées par cette équation, sont les deux *maxima* cherchés *. Si l'une & l'autre constante a & b est $= 0$, on ne peut pas négliger les termes qui suivent $ax + bx$. Mais on doit faire le terme suivant $cx^2 + dxy + ey^2 = 0$, ou $x^2 + \frac{d}{c}xy + \frac{e}{c}y^2 = 0$, les racines de cette équation sont imaginaires si $dd < 4ce$, excepté le cas où x & y seroient $= 0$: car alors toute l'équation seroit divisible par $x = 0$, & $y = 0$. Dans ce cas le point appartient véritablement à la Courbe, mais il en est entiérement séparé *. On l'appelle *point conjugué*, & relativement à ce point il n'y a pas de Tangente : car une Tangente doit avoir au moins deux points infiniment proches communs avec la Courbe.

Pour se former une idée nette de ces sortes de points, soit la Courbe désignée par $y = b \pm \sqrt{((b-x)(c-x)(a-x)(d+x) \&c.)}$, il est visible qu'en faisant $x = ap = b$ (fig. 24), la quantité qui est sous le signe devient $= 0$, à cause de $b - x = 0$; donc on aura $y = b = pn$. Le point n appartiendra donc à la partie de la Courbe qui se trouvera en deçà de q. Si on suppose qu'en fai-

* Nous traiterons la question de *maximis* & *minimis* dans le Calcul différentiel.

** Parce que soit qu'on suppose les x positifs ou négatifs, les ordonnées voisines deviennent imaginaires; donc ce point est séparé du reste de la Courbe.

sant $x > b$, de maniere cependant que x soit plus petit que $aq = e$, la quantité qui est sous le signe devienne négative, les ordonnées qui se trouvent au-delà de q seront imaginaires; mais elles seront réelles entre p & q. De même si en faisant $x > ar$, mais en supposant aussi $x < as$, la quantité qui est sous le signe deviênt négative, les ordonnées situées entre r & s, seront réelles, quoique celles qui sont situées entre q & r & au-delà de s puissent être imaginaires. De plus à cause du signe $\pm$ du radical, à chaque point u situé entre r & s répondront deux ordonnées uk, ui. Si le point r tombe sur le point s & le point u, la figure N qu'on appelle *ovale conjuguée*, deviendra un seul point, les ordonnées uk, ui étant terminées à un même point N. Ainsi l'on aura un point conjugué N (fig. 25) séparé du reste de la Courbe. Il n'est pas difficile de voir que si p & q se confondoient, il en naîtroit un autre point conjugué n (fig. 25.). Ces deux points auront des ordonnées réelles pN, pn. Mais si ces points étoient infiniment proches, alors deux ovales conjuguées se confondroient en un seul point qui seroit censé répondre à quatre ordonnées confondues en une; ainsi ce point seroit quadruple *. Si une ovale b (fig. 24) touche la Courbe en un point b, il en résulte une feuille bxt & un nœud en b. Le point b est censé réunir deux points h & g de la Courbe, qui se confondent en un seul

* Lorsque l'ovale N (fig. 24) se réduit en un point, les ordonnées ui, uk aboutissent au même point, qu'on appelle alors *point conjugué*, qui est évidemment un *point double*; donc si deux ovales tombent l'une sur l'autre, & que toutes les deux se réduisent à un seul point, ce point sera quadruple.

point b, lorsque fh devient $= fg = fb$. Si l'ovale b se réduit en un seul point d (fig. 25), il en résultera une pointe d, qu'on appelle *point de rebroussement* (parce que la Courbe après avoir avancé de M vers d, rebrousse son chemin vers T), & qui est nécessairement au moins un point double. Si par le point b (fig. 24) ou par le point d (fig. 25) il passe une, deux, &c. branches de plus, il est visible que ces points seront au moins triples, quadruples, &c.

Revenons aux Tangentes des Courbes. Selon ce que nous avons dit ci-dessus, lorsque l'équation $cx^2 + dxy + ey^2 = 0$, n'est pas résoluble en facteurs réels, la Courbe a nécessairement un point conjugué. Lorsque $dd > 4ce$, l'équation est résoluble en deux facteurs de cette forme $ax + by = 0$, $Ax + By = 0$; donc puisque l'un & l'autre facteur détermine une Tangente, il est nécessaire qu'au même point c (fig. 26) aboutissent deux Tangentes, ce qui ne peut se faire à moins que deux branches de la même Courbe ne passent par le même point c. La Tangente de la branche ac est cg, celle de la branche dc étant ct, l'une de ces branches est déterminée par le premier facteur, l'autre par le second facteur. Si les deux facteurs sont égaux, c'est-à-dire, si $dd = 4ce$, les Tangentes ct, cg se confondront; donc les deux branches auront la même direction en c, de plus elles se toucheront en ce point. Dans tous ces cas le point c est un point double, car il est censé réunir deux points de la Courbe.

53. COROLLAIRE. L'équation $cx^2 + dxy + ey^2 = 0$, donne toujours un point double. Ce point est conjugué lorsque les facteurs de cette équation sont imaginaires. Le point c est l'intersection

des deux branches de la même Courbe, lorsque les facteurs de cette équation sont réels & inégaux. Ce point est commun à deux branches qui se touchent, lorsque les deux facteurs de cette équation sont égaux.

54. Si non-seulement a & b, mais encore c, d, e étoient $= 0$, dans ce cas l'équation subsisteroit entre les quantités du troisieme degré, & l'on auroit $fx^3 + gx^2y + hxy^2 + iy^3 = 0$. Si cette équation a deux racines imaginaires & une réelle, il passera par le point c une seule branche de la Courbe, dont la Tangente sera déterminée par le facteur réel de l'équation du troisieme degré. Il y aura de plus une ovale conjuguée réduite en un point conjugué, confondu avec le point c. Si les trois facteurs de l'équation sont réels, il passera trois branches de la Courbe par le point c. Ces branches se couperont si les trois facteurs sont inégaux, deux se toucheront si deux facteurs sont égaux; mais toutes les trois se toucheront si les trois facteurs sont égaux. Dans tous ces cas le point c sera triple, & la droite qui passera par c sera censée réunir trois points de la Courbe.

Si f, g, h, i étoient $= 0$, l'équation auroit lieu entre les quantités du quatrieme degré, & l'on auroit $kx^4 + mx^3y + nx^2y^2 + pxy^3 + qy^4 = 0$. Cette équation (par la nature des équations du quatrieme degré, voyez l'Algebre) a tous ses facteurs imaginaires, ou tous réels, ou deux réels & deux imaginaires. Dans le premier cas regardant l'équation comme composée de deux facteurs réels du second degré, dont les facteurs sont imaginaires, chacun de ces facteurs du second degré donnera un point conjugué; donc le point c sera

un point conjugué double : dans le second cas il passera par le point c quatre branches de la même Courbe, qui se couperont si ces facteurs sont inégaux, elles se toucheront s'ils sont égaux, deux ou trois se toucheront si deux ou trois facteurs sont égaux : dans le troisieme cas deux branches se couperont ou se toucheront en c, selon que les facteurs réels seront inégaux ou égaux, & de plus le point c réunira un point conjugué ; de sorte qu'une droite quelconque qui passera par c sera censée réunir quatre points de la Courbe. On peut voir maintenant ce qui arriveroit s'il falloit prendre les quantités de 5, 6, 7, &c. dimensions. Passons à la courbure de lignes algébriques.

Deux arcs infiniment petits am, an (fig. 27) de deux Courbes qui ont une tangente commune en a, sont censés avoir la même courbure, lorsque la différence des ordonnées extrêmes pn, pm, aussi-bien que des ordonnées rP, qP comprises entre les extrêmes & le point a, sera moindre qu'aucune quantité donnée. Dans ce cas la Courbe intérieure amb sera appellée la *Courbe osculatrice* de la Courbe and au point a.

55. THÉORÊME I. *Une parabole d'un parametre* $=2a$, *a pour cercle osculateur à son sommet, le cercle dont le rayon* $=a$. Soit ambM un cercle dont le rayon $=a$, and une parabole dont le parametre $=2a$ & dont a est le sommet. Prenant l'abscisse évanouissante ap & menant l'ordonnée nmp, par la nature du cercle l'on a $(pm)^2=y^2=2ax-x^2$, ou $2ax=y^2+x^2$. Par la nature de la parabole $(pn)^2$ est $=Y^2=2ax$. Substituant dans cette équation la valeur de $2ax$ prise de la précédente, il vient $Y^2=y^2+x^2$, & $Y=\sqrt{(y^2+x^2)}$

$= y + \frac{x^2}{2y}$ * ; donc $pn - pm = Y - y = \frac{x^2}{2y}$ $= \frac{(ap)^2}{2pm}$. Si pm eſt $= \frac{1}{\infty}$, ap ſera $= \frac{1}{\infty^2}$, car par la propriété du cercle $bp : pm :: pm : ap$; or bp eſt une quantité finie, infiniment plus grande que pm, qu'on ſuppoſe $= \frac{1}{\infty}$; donc pm eſt infiniment plus grande que ap; mais pm eſt un infiniment petit du premier ordre; donc ap eſt un infiniment petit du ſecond ordre; donc $ap = \frac{1}{\infty^2}$; $(ap)^2 = \frac{1}{\infty^4}$ & $\frac{(ap)^2}{2pm} = \frac{1}{2\infty^3}$; donc $nm = Y - y$ eſt plus petit qu'aucune quantité donnée; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc ſi l'on connoît la parabole qui à ſon ſommet a la même courbure qu'une Courbe quelconque en un point donné (cette parabole ſera appellée *Parabole oſculatrice de la Courbe par rapport à ce point*), on aura facilement le cercle oſculateur de cette Courbe au même point : car par le Théorême le rayon de ce cercle doit être égal à la moitié du parametre de la parabole oſculatrice.

56. THÉORÊME II. *La parabole ordinaire ne peut être la Courbe oſculatrice au ſommet de la para-*

---

* Elevant $y^2 + x^2$ à la puiſſance $m = \frac{1}{2}$ par le Binome de Newton, on trouvera $(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = y + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{(y^2)^{\frac{1}{2}}}$ &c. $= y + \frac{x^2}{2y}$. A cauſe que x étant infiniment petit les termes ſuivants diſparoiſſent devant le ſecond.

bole désignée par l'équation $a^{n-m}x^m = y^n$, si $\frac{n}{m} > 2$.
Soit supposée aqm (fig. 28) la parabole ordinaire ; arm la parabole de l'équation $y^n = a^{n-m}x^m$, prenant l'abscisse aP extrêmement petite & menant l'ordonnée Pm (y). Par la nature de la parabole arm, y^n sera

$= a^{n-m}x^m$ & $y = a^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m}{n}}$; donc $y^2 = a^{\frac{2n-2m}{n}} x^{\frac{2m}{n}}$

$= \frac{a^{\frac{2n-2m}{n}} x}{x^{\frac{n-2m}{n}}}$, à cause de $\frac{x}{x^{\frac{n-2m}{n}}} = \frac{x^{\frac{n}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{n}}} = x^{\frac{2m}{n}}$

en ôtant l'exposant du diviseur de celui du dividende ; or l'équation à la parabole aqm, donne

$y^2 = px$; donc si $p = \frac{a^{\frac{2n-2m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{n}}} = \infty$, à cause de

$x = \frac{1}{\infty}$ & de $\frac{n}{m} > 2$ (ce qui donne $n > 2m$ &

par conséquent les exposants $\frac{2n-2m}{n}$, $\frac{n-2m}{n}$ positifs), la parabole aqm rencontrera la parabole arm en m. Cependant la courbure de l'arc aqm sera différente de celle de l'arc arm : car prenant l'abscisse ap $(x') < a$P & faisant $pr = z$, $pq = q$, par la propriété de la parabole arm, on a $pr = z = a^{\frac{n-m}{n}} x'^{\frac{m}{n}}$, & par la propriété de la

parabole ordinaire $pq = q = \sqrt{px'} = \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{2n}}}$

$\times (x')^{\frac{1}{2}}$, en substituant la valeur supposée de p ;

donc $pr : pq$, ou $z : q :: (x')^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{n-m}{n}} : (x')^{\frac{1}{2}}$

$\times \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{2n}}} :: x^{\frac{n-2m}{2n}} : (x')^{\frac{n-2m}{2n}}$, en divisant par $a^{\frac{n-m}{n}}$ & par $(x')^{\frac{m}{n}}$ & multipliant par $x^{\frac{n-2m}{2n}}$. Mais il est évident que x & x', c'est-à-dire, a P & ap, peuvent être dans tel rapport d'inégalité qu'on voudra ; donc pr & pq ne peuvent pas être supposées différer d'une quantité infiniment petite par rapport à elles ; donc l'arc aqm n'a pas la même courbure que l'arc arm quand même la parabole aqm auroit un parametre infini ; donc, &c.

57. THÉORÊME III. *Si* $\frac{n}{m} < 2$ *mais* $\frac{n}{m} > 1$, *la parabole ordinaire ne peut être la Courbe osculatrice au sommet a de la parabole arm, quand même on supposeroit le parametre de la parabole vulgaire infiniment petit.* Par un calcul semblable nous parviendrons à l'équation $\frac{x^{\frac{2m-n}{n}} x}{a^{\frac{2m-2n}{n}}} = y^2 =$ $(Pm)^2$; ainsi pour que la parabole ordinaire passe par le point m, son parametre p doit être $=$ $\frac{x^{\frac{2m-n}{n}}}{a^{\frac{2m-2n}{n}}}$, qui dans ce cas est une quantité infiniment petite. Prenant $ap = x'$, nous aurons $pq = \frac{x^{\frac{2m-n}{2n}}}{a^{\frac{m-n}{n}}} \times (x')^{\frac{1}{2}}$, $pr = a^{\frac{n-m}{n}} (x')^{\frac{m}{n}}$; donc

$pq : pr :: x.^{\frac{2m-n}{2n}} (x')^{\frac{1}{2}} : (x')^{\frac{m}{n}} :: x^{\frac{2m-n}{2n}} :$ $(x')^{\frac{2m-n}{2n}}$, en divisant par $(x')^{\frac{1}{2}}$ & multipliant par $a^{\frac{m-n}{n}}$; donc pq & pr peuvent être dans tel rapport d'inégalité qu'on voudra, puisque x & x' peuvent être supposés dans un rapport quelconque de plus grande inégalité; donc &c. Dans le cas du Théorême l'on a $pq > pr$, & l'arc arm se trouve situé entre l'axe & l'arc aqm, c'est-à-dire, que tous les points de ce dernier arc, excepté les points m & a, doivent être regardés comme plus éloignés de l'axe, que les points correspondants de l'arc arm.

COROLLAIRE. Il suit des Théorêmes précédents que la seule parabole vulgaire a au sommet une courbure circulaire : puisque si les autres paraboles avoient une courbure circulaire au sommet, elles auroient pour parabole osculatrice une parabole ordinaire, dont le parametre seroit double du rayon du cercle osculateur, ainsi qu'il suit du premier Théorême *.

58. THÉORÊME IV. *Les courbures au sommet*

* Presque tous les Géometres enseignent qu'une Courbe dont le rayon osculateur est infiniment grand ou infiniment petit, a pour Courbe osculatrice quelque parabole différente de la parabole vulgaire : il s'agit ici d'une parabole considerée à son sommet. Ce que nous venons de dire fait assez sentir ce qu'on doit penser d'une telle doctrine; selon laquelle une parabole différente de la vulgaire pourroit avoir la même courbure au sommet que celle d'*Apollonius*, en supposant le parametre de cette derniere infiniment grand, ou infiniment petit.

des paraboles de différents ordres sont d'un genre entiérement différent. Supposant $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$. Je dis que les paraboles représentées par les équations $b^{q-p} x^p = y^q$, $a^{m-n} x^m = y^n$, ne peuvent être osculatrices au sommet l'une par rapport à l'autre, quand même le parametre b de la premiere seroit infini, ou le parametre a de la seconde infiniment petit. Soit la premiere parabole aqm, la seconde arm, l'ordonnée commune P $m = y$. Supposant toujours a P $= x$, nous avons $a^{n-m} x^m = y^n$, $b^{q-p} x^p = y^q$; donc prenant la racine n pour la premiere équation & la racine q pour la seconde, $a^{\frac{n-m}{n}} . x^{\frac{m}{n}} = y$, $b^{\frac{q-p}{q}} . x^{\frac{p}{q}} = y$; donc $a^{\frac{n-m}{n}} . x^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{q-p}{q}} . x^{\frac{p}{q}}$, ou (en divisant par $b^{\frac{q-p}{q}} . x^{\frac{m}{n}}$) $\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{q-p}{q}}} = x^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}$. Dans cette équation, à cause de $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$, le second terme est infiniment petit, en supposant x infiniment petit ; donc aussi le premier terme sera infiniment petit, ce qui peut arriver, en supposant que b est infiniment grand, a étant supposé fini, ou que a est infiniment petit b étant fini. Mais dans cette supposition même il n'y a point d'osculation. En effet prenant l'abscisse $ap = t$, nous aurons $a^{\frac{n-m}{n}} . t^{\frac{m}{n}} = pr$, $b^{\frac{q-p}{q}} . t^{\frac{p}{q}}$

$= pq$; donc $pr : pq :: a^{\frac{n-m}{n}} \cdot t^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{q-p}{q}} \cdot t^{\frac{p}{q}} ::$ $\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{q-p}{q}}} : t^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}$; or nous venons de voir que

$\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{q-p}{q}}} = x^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}$; donc $pr : pq :: x^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}} :$

$t^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}$; donc puisque x & t, c'est-à-dire, aP & ap peuvent être en raison quelconque de plus grande inégalité, pr & pq ne different pas entre elles d'une quantité qr infiniment petite par rapport à elles; donc les arcs aqm, arm ne sont pas osculateurs l'un par rapport à l'autre; donc &c.

Puisque les courbures au sommet des paraboles de différents ordres sont de différents genres, il sera commode de rapporter les courbures des Courbes aux courbures des sommets des paraboles. Ayant tiré ch (fig. 23 A) perpendiculaire sur la tangente cg, & lui ayant mené l'ordonnée perpendiculaire pk, rappellons-nous l'équation entre cf & pf (51.), savoir $ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + fx^3 +$ &c. $= 0$ (P), qu'il faudra transporter aux nouvelles coordonnées ck (t) pk (u). Supposons que la raison de l'ordonnée à la soustangente ou de $pf : cf$, ou de la sous-normale bh à l'ordonnée bc *, est égale à la raison de

* Car le triangle gch rectangle en c donne, en supposant bc perpendiculaire sur l'hypothénuse, $bh : bc :: bc : bg$. Voyez la Géométrie.

$a : -b$; donc les côtés du triangle hbc feront comme a, $-b$, $-\sqrt{(a^2+b^2)}$ *. Du point f tirez fi, fl paralleles aux nouvelles coordonnées. Les triangles femblables bhc, cfl ** donnent $ch : cb :: cf : fl$, ou $-\sqrt{(a^2+b^2)} : -b :: x : fl = \frac{-bx}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Les triangles femblables pif, bhc***donnent $ch:bh::fp:pi$, ou $-\sqrt{(a^2+b^2)} : a :: y : pi = \frac{ay}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Les triangles bhc, cfl donnent $ch : bh :: cf : cl$, ou $-\sqrt{(a^2+b^2)} : a :: x : cl = \frac{ax}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$. On a encore par les triangles pfi & bhc, $-\sqrt{(a^2+b^2)} : -b :: y : fi = \frac{-by}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$; or $fl + pi = ik + pi = pk = u = \frac{-bx+ay}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$ & $cl - fi = ck = t$

* Si l'on compare la figure préfente avec la figure 15, on verra que an alloit en s'approchant de la Courbe & en s'éloignant de l'axe des abfciffes, alloit, dis-je, de la gauche à la droite, tandis que ch va en partant de l'axe des abfciffes, de la droite à la gauche. Au refte à l'égard du figne de la quantité $\sqrt{(aa+bb)}$, voici la regle qu'on doit obferver : fi a & b ont le même figne, le radical doit avoir le figne $+$, & le figne $-$ fi a & b ont différents fignes.

** Car ces triangles ont chacun un angle droit, & les angles fcl; bhc alternes internes.

*** Les angles b & i font droits, les angles gcb, fpi ayant leurs côtés paralleles font égaux; or gcb eft complément de bch, de même que bhc; donc fpi eft $= bhc$; donc &c.

$= \frac{ax+by}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$; donc $ax+by = -t\sqrt{(a^2+b^2)}$.... (A). De ces équations on tire $x = \frac{at-bu}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $y = \frac{bt+au}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Substituant ces valeurs de x & de y dans l'équation P, vous aurez l'équation cherchée entre t & u.

Supposons d'abord que a & b ne manquent pas dans l'équation, à cause que $-ax-by = cx^2+dyx+$ &c., ainsi qu'on le tire aisément de l'équation P, & que $t = \frac{ax+by}{-\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{-ax-by}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{cx^2+dyx+\&c.}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, il est visible que t est infiniment plus petit que $u = \frac{-bx+ay}{-\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{-ay+bx}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ (en changeant les signes du numérateur & du dénominateur), puisque t est exprimé par une fonction de plusieurs dimensions des infiniment petits x & y, tandis que u est exprimé en termes d'une seule dimension des mêmes x & y. De plus, parce que $u = \frac{bx-ay}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ est infiniment plus grand que $t = \frac{-ax-by}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{cx^2+dyx+\&c.}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, & que cx^2+dyx &c. est infiniment plus petit que ax ou by, il est visible que $-ax-by$ est infiniment petit par rapport aux quantités by & ax, aussi-bien que par rapport à $bx-ay$.

COROLLAIRE. Donc, excepté dans l'équation

tion A, on pourra faire $x = \frac{-ub}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$, en négligeant le terme at, & $y = \frac{au}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$ en négligeant bt. Si l'on substitue dans l'équation P trouvée ci-dessus $-t\sqrt{(a^2+b^2)}$ à la place de $ax+by$, & dans tous les autres termes les dernieres valeurs de x & de y que nous venons de trouver, il en résultera $-t\sqrt{(a^2+b^2)}$

$$+\begin{pmatrix} cb^2 \\ -dab \\ +ea^2 \end{pmatrix}\frac{u^2}{a^2+b^2}+\begin{pmatrix} fb^3 \\ -gb^2a \\ +hba^2 \\ +ia^3 \end{pmatrix}\times\frac{u^3}{(a^2+b^2).\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

&c. $= 0$.

Si le coefficient de u^2 n'est pas 0, négligeant tous les termes qui suivent le second, l'équation subsistera entre les deux premiers, & l'on aura $u^2 = \frac{(a^2+b^2).\sqrt{(a^2+b^2)}}{cb^2 - dab + ea^2} \times t = pt$, en faisant le multiplicateur de t égal à la quantité p. Mais $u^2 = pt$ est une équation à la parabole vulgaire dont le sommet a la même courbure que la Courbe au point donné; donc la parabole ordinaire, c'est-à-dire, la parabole d'*Apollonius* sera la Courbe osculatrice cherchée. Si le multiplicateur de u^2 est 0, l'équation aura lieu entre le premier & le troisieme terme; ainsi en transposant, ôtant la fraction & divisant ensuite le multiplicateur de t par celui de u^3, & faisant le quotient $= p^2$, on aura $u^3 = p^2 t$. Cette équation est à la premiere parabole cubique, dont le sommet a la même courbure que la Courbe au point donné. Si le troisieme terme manquoit, l'équation auroit lieu entre le

premier & le quatrieme, & ainsi des autres; donc il en résultera toujours une équation de cette forme $p^{n-1} t = u^n$, & la Courbe osculatrice sera toujours une parabole de l'ordre n. A l'égard du parametre p il sera infini; toutes les fois que a ou b étant infinis, le dénominateur de la fraction d'où résulte p^{n-1} sera infiniment plus petit que le numérateur : mais si a & b étant infiniment petits, le numérateur de la fraction est infiniment plus petit que le dénominateur, p sera néanmoins infiniment petit.

59. Si a & b sont o en même tems, il faut examiner le second terme $cx^2 + dxy + ey^2$. Si cette quantité n'a aucun facteur réel, on a (53) un point conjugué, pour lequel il n'y a point de Courbe osculatrice. Si ce terme a deux facteurs réels inégaux $ax + by$, $mx + ny$, on divisera par $mx + ny$ & l'on aura $ax + by + \frac{fx^3 + gx^2y + hx^2y^2 + iy^3 \text{ \&c.}}{mx + ny}$ $= 0$. Substituant $\frac{bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ pour x & $-\frac{au}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ pour y, excepté dans la quantité $ax + by$, pour laquelle vous écrirez $-t\sqrt{(a^2+b^2)}$, l'on aura $-t\sqrt{(a^2+b^2)} + \frac{(fb^3 - gab^2 + ha^2b - ia^3).u^2}{(mb - na).(a^2+b^2)}$ &c. $= 0$. Si le multiplicateur de u^2 n'est pas o, on aura une équation de cette forme $u^2 = pt$; donc la parabole d'*Apollonius* sera la Courbe osculatrice. Si le multiplicateur de u^2 manque, l'on aura $u^3 = p^2 t$. En général la Courbe osculatrice sera une parabole désignée par l'équation $u^n = p^{n-1} t$, ainsi qu'auparavant. En un mot si le premier membre qui ne manque pas dans l'équation a un facteur réel simple $ax + by$, en supposant l'autre facteur $= q$, & divisant les termes suivants par q,

on trouvera toujours une équation de la forme $u_n = p^{n-1} t$, n étant un nombre entier positif.

60. Mais si le premier membre qui se trouve ne pas manquer dans l'équation, à deux ou trois facteurs égaux, on ne peut pas négliger tous les termes où se trouve t, quoique t soit infiniment plus petit que u; mais on doit seulement négliger les termes dans lesquels t a un exposant égal ou plus grand que le nombre des facteurs égaux, qui se trouvent dans le premier membre. Soit l'équation $(ax + by)^2 + fx^3 + gx^2y + hxy^2 + iy^3 + kx^4 + \&c. = 0$. Substituant $\frac{-at + bu}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ au lieu de x, $\frac{-bt - au}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ à la place de y, on trouvera une équation de cette forme $t^2 + ctu^2 + du^3 + etu^3 + fu^4 + gtu^4$ &c. $= 0$ *, en négligeant tous les termes qui contiendroient t^2, t^3, &c. multipliés par u, u^2, &c. aussi-bien que tous les termes qui contiendroient t^3, t^4, &c. : car tous ces termes disparoissent devant ceux que contient la derniere équation dont on vient de parler. Si $c = 0$, mais non pas d, l'équation sera $t^2 + du^3 = 0$, ou $u^3 = \frac{-1}{d} t^2 = pt^2$, en faisant $\frac{-1}{d} = p$. Cette équation est à la seconde parabole cubique, qui sera la Courbe osculatrice cherchée. Si $d = 0$ aussi-bien que e, on a $t^2 = -fu^4$, ou $t = \pm u^2 \sqrt{-f}$. Si f est positive, la Courbe osculatrice est imaginaire, & le point donné est un

* On suppose le premier terme de l'équation délivré de son coefficient, parce que cela est toujours possible. Voy. l'Alg.

point coujugué. Si f eſt négative, la Courbe oſculatrice eſt une double parabole ordinaire ; l'une de ces paraboles eſt ſituée du côté des t poſitifs, l'autre du côté des t négatifs. Au reſte ces deux paraboles ſont égales. En procédant ainſi on déterminera facilement les paraboles oſculatrices qui réſultent de l'évanouiſſement des termes où ſe trouve t combiné avec u.

61. Suppoſons maintenant que c n'eſt pas $= 0$. Si d n'eſt pas $= 0$, il eſt viſible que tu^2 eſt une quantité infiniment petite en comparaiſon de u^3 ; donc l'équation ſubſiſtera entre les deux termes $tt + du^3 = 0$. Mais ſi $d = 0$, tu^3 s'évanouiſſant devant tu^2, l'équation ſubſiſtera dans les termes $t^2 + ctu^2 + fu^4 = 0$. Si dans cette équation on ſuppoſe t & u^2 du même ordre, tous les termes ſeront du même ordre. Si cette équation a tous ſes facteurs imaginaires, le point donné ſera un point conjugué, qui ne peut avoir aucune Courbe oſculatrice. Si l'équation a deux facteurs réels, l'on trouvera deux équations de cette forme $t = mu^2$, ou $u^2 = \frac{1}{m} t = pt$, qui donneront deux paraboles vulgaires oſculatrices égales ou inégales, ſelon que les facteurs de l'équation ſeront égaux ou inégaux ; donc la Courbe aura deux branches, qui auront pour Courbes oſculatrices les paraboles dont nous venons de parler. De plus ces paraboles ſe confondront en une, ſi les facteurs de l'équation ſont égaux. Si l'on a auſſi $f = 0$, on aura l'équation $tt + ctu^2 + hu^5 = 0$; parce que tu^4 s'évanouit devant tu^2. Si l'on ſuppoſe que t & u^2 ſoient du même ordre, u^5 diſparoîtra devant les deux autres termes, & l'on aura $t^2 + ctu^2 = 0$, ou $cu^2 + t = 0$, ou $u^2 = \frac{-1}{c} t = pt$, équation à la parabole

d'Apollonius. Mais si l'on suppose t^2 du même degré que u^5, ou t du même degré que $u^{\frac{5}{2}}$, tu^2 devient infiniment plus grand que les deux autres termes ; donc l'équation ne peut subsister. Supposons t & u^3 du même degré, tt disparoîtra devant les autres termes, & l'on aura l'équation $ctu^2 + hu^5 = 0$, ou $ct + hu^3 = 0$, ou $u^3 = \frac{-c}{h} t = p^2 t$, équation à la premiere parabole cubique. On peut voir maintenant ce qui arriveroit si h étant $= 0$, il falloit considérer le terme ku^6. c & d étant $= 0$ & non pas e, si f n'est pas $= 0$, tu^3 disparoîtra devant u^4 ; donc l'on aura l'équation $t^2 = -fu^4$, ou $t = \pm u^2 \sqrt{-f}$ que nous avons déja examinée. Si $f = 0$, tu^4 disparoissant devant u^5, on aura $tu^2 + etu^3 + hu^5 = 0$, dont on ne peut tirer que la seule équation $tt + hu^5 = 0$, ou $u^5 = \frac{-1}{h} \cdot t^2$, ou $u^5 = p^3 t^2$, équation à une parabole du cinquieme ordre. Si $h = 0$, on aura l'équation $t^2 + etu^3 + ku^6 = 0$. Si t & u^3 sont du même ordre, tous les termes de l'équation seront du même ordre. Si cette équation a ses facteurs imaginaires, elle indique un point conjugué. Si elle a deux facteurs réels, elle représente deux paraboles de la forme $u^3 = p^2 t$, qui sont les Courbes osculatrices de deux branches de la Courbe qui passent par le point donné. Ces deux paraboles se confondent en une, si les deux facteurs de l'équation sont égaux. En général dans ces cas on a une équation de cette forme $t^2 + Atu^p + Bu^q = 0$ (H), dans laquelle $p < q$, autrement les

second terme disparoîtroit devant le troisieme. Si $q = 2p$ tous les termes de l'équation seront homogenes, en supposant $t = u^p$. Si l'équation n'a point de facteurs réels, elle indique un point conjugué. Si elle a deux facteurs réels, elle se réduit à deux équations de cette forme $u^p = a^{p-1} t$ qui donnent deux paraboles osculatrices, qui se confondent en une lorsque les facteurs sont égaux. Si $2p > q$, l'équation H devient $tt + Bu^q = 0$, qui se résout en deux si q est un nombre pair, ou qui donne une seule parabole osculatrice si q est un nombre impair. Enfin si $2p < q$, on a deux équations de cette forme $u^p = a^{p-1} t$, $u^m = b^{m-1} t$ qui donnent deux paraboles osculatrices par rapport à deux branches de la Courbe qui passent par le même point *.

Si le facteur double $(ax + by)^2$ étoit multiplié par une fonction entiere de x & de y, en substituant les valeurs de x & de y, données en t & u, & divisant par le multiplicateur du facteur double, en faisant attention que tous les termes qui contiennent t disparoissent devant celui qui contient seulement u, il est visible qu'on parviendra à une équation de la même forme que celle que nous avons trouvée ci-dessus.

62. Si le premier membre de l'équation contient un facteur triple, nous parviendrons à une équation de cette forme $t^3 + at^2 u^p + btu^q + cu^r = 0$, dans

* L'équation H donne alors les deux suivantes $t^2 + Atu^p = 0$, $At + Bu^{q-p} = 0$, ou en supposant $q - p = m$ & $-\frac{A}{B} = b^{m-1}$, $u^m = b^{m-1} t$; or l'équation $t^2 + Atu^p = 0$ donne $u^p = a^{p-1} t$.

laquelle on ne peut ſuppoſer $p < 2$, mais on a $p < q$ & $q < r$. Si a & b ſont $= 0$, on aura l'équation $t^3 + c u^r = 0$, qui détermine l'eſpece de la parabole oſculatrice. Si r eſt diviſible par 3, on trouvera $t = - u^{\frac{r}{3}} \sqrt[3]{c}$, ou $u^m = p^{m-1} t$, en faiſant $\frac{r}{3} = m$ & $\frac{-1}{\sqrt[3]{c}} = p^{m-1}$; donc la parabole oſculatrice ſera de l'ordre m, & parce que $\sqrt[3]{c}$ a une valeur réelle & deux imaginaires, il y aura au même point de la Courbe un point conjugué. Si $2p = q$ & $3p = r$, & par conſéquent $3q = 2r$, en ſuppoſant t & u^p du même ordre, tous les termes ſeront homogenes, c'eſt-à-dire, du même ordre, & on ne pourra en négliger aucun. Si la formule a un facteur réel & deux imaginaires; avec un point conjugué, on aura encore une parabole oſculatrice de la forme $u^p = a^{p-1} t$. Si les trois facteurs ſont réels on a trois paraboles oſculatrices de la même forme, deux ou même les trois ſe confondront enſemble, ſi deux ou les trois facteurs ſont égaux. Si les expoſants n'ont pas la proportion dont nous venons de parler, ſuppoſez ſucceſſivement du même ordre les termes pris deux à deux; examinez enſuite ce que les autres deviennent. S'ils ſe trouvent du même ordre, on ne peut pas les négliger, s'ils ſont infiniment petits par rapport à ceux qu'on ſuppoſe du même ordre, l'équation aura lieu entre ces deux là ſeulement. Si quelqu'un des termes négligés ſe trouve infiniment plus grand que les deux termes comparés, l'équation ne peut avoir lieu entre ces deux termes. Par cette méthode vous déterminerez toutes

P 4

les paraboles osculatrices par rapport à un point donné d'une Courbe algébrique. On suivra la même méthode si le premier membre contient quatre, cinq, six, &c. facteurs égaux.

63. COROLLAIRE. On peut conclure de ce qu'on vient de dire, qu'il n'y a aucun arc d'une Courbe quelconque qui n'ait une parabole pour Courbe osculatrice. C'est pourquoi on peut distinguer les divers genres de courbure par les différents genres des paraboles. Je mets dans le premier genre des paraboles celles qui ont la forme $t = pu^m$, m étant un nombre entier positif. Le point de la Courbe où se fait l'osculation est alors un point simple. Si $m = 2$, on peut comparer la courbure avec la courbure circulaire. Si $m = 3$, la Courbe a un point d'*inflexion* & de concave devient convexe dans ce point (fig. 29) : on sait que la premiere parabole cubique a un point d'inflexion au sommet (Voyez ce que nous avons dit dans les Sections Coniques sur les paraboles de différents ordres). Si $m = 4$, on ne voit aucun point d'inflexion (fig. 30) ; mais on a coutume de considérer un point d'inflexion double, qu'on peut appeller *point de serpentement ;* car la Courbe de convexe devient concave, & aussi-tôt de concave redevient convexe. Si $m = 5$, on a un point d'inflexion visible ; mais on regarde ce point comme répondant à une inflexion triple, à cause que la Courbe de concave devient convexe, ensuite de nouveau concave, & enfin de nouveau convexe, & ainsi successivement ; de sorte que le nombre des inflexions est toujours $m - 2$, & les inflexions sont visibles ou invisibles, selon que m est un nombre impair ou pair. Dans ce dernier cas on a des points de serpentement.

Les paraboles du second genre sont de la forme $t^2 = p u^m$, qui indique des points doubles, dont chacun équivaut à deux points simples. Si $m = 3$, on aura un *point de rebroussement de la premiere espece* (c'est celui dans lequel deux branches de la même Courbe se présentent leurs convexités), parce que la parabole cubique $t^2 = p u^3$ (fig. 31) a une telle figure.

Si $m = 4$ il en résultera la forme de la fig. 32, qui ne représente que deux paraboles ordinaires. En général les branches de la parabole osculatrice sont comme dans la figure 31 si m est impair, & comme dans la figure 32 si m est pair. Mais dans ce dernier cas il y a deux paraboles de la forme $t = p u^{\frac{m}{2}}$.

64 COROLLAIRE. Il suit de ce qui précéde, que le point d'une Courbe est double lorsqu'il est conjugué, lorsqu'on a au même point de la Courbe deux paraboles osculatrices ordinaires, ou quand la parabole osculatrice est du second genre.

Les paraboles du troisieme genre sont de la forme $t^3 = p u^m$. Le point d'osculation est alors triple. Si $m = 4$, la figure est semblable à celle de la parabole ordinaire. Si $m = 5$, on a un point d'inflexion ; si $m = 6$, en prenant la racine cube, on a une parabole de la forme $t = p u^2$; & à cause des deux autres racines imaginaires, on a encore un point conjugué double En général si m est impair la Courbe a un point d'inflexion contraire, si m est pair on a la figure de la parabole ordinaire. Mais si m est divisible par 3, on a une parabole du premier genre avec un point conjugué. C'est pourquoi l'on a un point triple dans la Courbe lorsqu'on a un point conjugué & une parabole osculatrice du

premier genre, ou lorſqu'on a trois paraboles du premier genre, ou une du premier & une du ſecond, ou enfin une du troiſieme.

On peut remarquer que cela ne prouve pas que la Courbe exiſte réellement. Cela démontre ſeulement que l'oſculation a lieu ſi la Courbe exiſte, mais il peut arriver que la Courbe & ſa branche ſoient imaginaires; dans ce cas on a un point conjugué. Suppoſons que nous ayons trouvé l'équation $t^2 - \frac{2tu^2}{b} + \frac{u^4}{b^2} + \frac{u^6}{b^4} = 0$. Négligeant le dernier terme on trouve deux racines égales $t - \frac{u^2}{b} = 0$. Mais en ne négligeant rien & tranſpoſant le dernier terme, l'on a $t^2 - \frac{2tu^2}{b} + \frac{u^4}{b^2} = \frac{-u^6}{b^4}$; prenant les racines il vient $t - \frac{u^2}{b} = \pm \frac{u^3}{b^2}\sqrt{(-1)}$, ou $t = \frac{u^2}{b} \pm \frac{u^3}{b^2}\sqrt{(-1)}$ *; ainſi les racines ſont imaginaires, & l'on n'a qu'un point conjugué. C'eſt pourquoi, à cauſe des termes négligés comme infiniment petits par rapport aux autres, on peut trouver une Courbe oſculatrice réelle, qui réellement eſt imaginaire, & qu'on trouveroit telle en pouſſant le calcul plus loin.

Soit l'équation $t^2 - \frac{2tu^2}{b} + \frac{u^4}{b^2} + \frac{u^5}{b^3} = 0$; en négligeant le dernier terme, l'équation a deux facteurs égaux qui donnent deux paraboles ordinaires.

* Si petit qu'on ſuppoſe u de ce qu'il exiſte, $\frac{u^3}{b^2}\sqrt{(-1)}$ eſt une quantité imaginaire.

osculatrices qui se confondent en une, ce qui ne prouve pas que la Courbe a deux ou quatre branches réelles qui passent par le point donné & qui embrassent l'abscisse t positive : car faisant passer le dernier terme à la droite du signe d'égalité, prenant ensuite les racines & transposant, il vient $t = +\frac{u^2}{b} \pm \frac{u^2}{b\sqrt{b}}\sqrt{(-u)}$, si u est positif, t est imaginaire & la Courbe n'a aucune branche du côté des u positifs ; mais si u est négatif la Courbe a deux branches réelles qui répondent à la même abscisse ap (fig. 33), l'une & l'autre branche ayant pour parabole osculatrice en a la même parabole vulgaire.

65. On peut voir par-là l'existence *des points de rebroussement de la seconde espece ;* dans laquelle deux branches de la même Courbe sont tellement disposées que la concavité de l'une est tournée du côté de la convexité de l'autre : ce qui ne vient pas de la figure des paraboles osculatrices ; car aucune parabole ne peut avoir les branches ainsi disposées, & s'il y avoit deux paraboles, aux branches ac, ab s'en joindroient deux autres. Mais cela vient de ce que par la nature de l'équation de la Courbe ; les branches du côté des ordonnées positives sont imaginaires, les branches qui répondent aux ordonnées négatives étant réelles ou réciproquement. Nous en avons encore un exemple dans la Courbe de l'équation $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ (fig. 2) ; car on ne peut pas supposer x négatif, ni prendre le radical $\sqrt{x}$ en $-$, autrement y seroit imaginaire dans les deux cas ; en effet dans le premier on auroit $y = \sqrt{-x} \pm \sqrt{-x^3}$, & dans le

second le radical $\sqrt[4]{x^3}$ seroit une quantité imaginaire, ainsi que nous l'avons fait voir ailleurs (2). On peut remarquer que quoique les deux branches de cette Courbe soient d'abord situées au-dessus de l'axe des x, cependant une de ces branches coupe bientôt cet axe & descend au-dessous.

66. Cherchons maintenant quelle est la courbure des paraboles dans les autres points. Soit l'équation générale des paraboles $a^{n-1}p = q^n$, on suppose n plus grande que l'unité. Si on augmente p de la quantité x, & q de la quantité y, on aura $a^{n-1} \times (p + x) = (q + y)^n$, ou en résolvant le second membre en série, $a^{n-1}p + a^{n-1}x = q^n + nq^{n-1}y + \frac{n.(n-1)}{2}q^{n-2}y^2 +$ &c. De cette équation retranchant la premiere, il vient $a^{n-1}x = nq^{n-1}y + \frac{n.(n-1)}{2}q^{n-2}.y^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}q^{n-3}y^3 +$ &c. En supposant x & y infiniment petits, négligeant les termes qui disparoissent devant celui qui contient y^2, on trouvera, en transposant, $a^{n-1}x - nq^{n-1}y - \frac{n(n-1)}{2}q^{n-2}y^2 = 0$.

Mais l'équation $a^{n-1}p = q^n$, donne $\frac{q^n}{q}$, ou $q^{n-1} = \frac{a^{n-1}p}{q}$, & $q^{n-2} = \frac{a^{n-1}p}{q^2}$. Substituant ces valeurs de q^{n-1}, q^{n-2} & divisant ensuite par a^{n-1}, on a l'équation $x - \frac{npy}{q} - \frac{n.(n-1)}{2} \times \frac{py^2}{q^2} = 0$, ou $qx - npy - \frac{n.(n-1).py^2}{2q} = 0$. Pour transporter l'équation aux abscisses t, prises sur la per-

pendiculaire à la tangente au point donné, il faut faire $x = \frac{qt - npu}{\sqrt{(qq + nnpp)}}$, $y = \frac{npt + qu}{\sqrt{(q^2 + n^2 p^2)}}$ *, t étant infiniment petit respectivement à u, & l'équation deviendra en transposant & divisant, $u^2 = \frac{(q^2 + n^2 p^2) \cdot \sqrt{(q^2 + n^2 p^2)}}{n.\frac{(n-1)}{2}.pq} \cdot t = bt$, équation à la parabole ordinaire.

COROLLAIRE I. La courbure de toutes les paraboles dans tous leurs points, excepté au sommet, est donc de même espece que la courbure au sommet de la parabole ordinaire, & par conséquent de même espece que la courbure circulaire.

Supposant p l'abscisse, q l'ordonnée, b le parametre, on a par la nature de la parabole d'*Apollonius* $b : q :: q : p$; donc lorsque q est infiniment petit, p est encore infiniment plus petit; donc dans ce cas $q^2 + n^2 p^2 = q^2$, & l'équation devient $u^2 = \frac{q^2 t}{n.\frac{(n-1)}{2}.p}$. Si p est du même ordre que q^2, comme cela arrive dans la parabole ordinaire, le parametre b sera fini. Si p est infiniment petit, respectivement à q^2, ce qui arrive lorsque $n > 2$, le parametre devient infini. Si p est infiniment plus grand que q^2, ce qui a lieu si $n < 2$, le parametre devient infiniment petit. C'est pour-

* On trouvera ces mêmes formules en faisant $q = a$, $np = \pm b$, voyez le n° 58. Comme q & np ont les mêmes signes que a & b, on ne doit rien changer aux valeurs de x & de y (58).

quoi prenant dans une parabole quelconque un arc infiniment petit & si proche qu'on voudra de son sommet, pourvu qu'on n'y comprenne pas ce sommet, tirant par le milieu de cet arc une ligne qui lui soit perpendiculaire, on trouvera toujours pour cet arc une Courbe osculatrice, qui sera la parabole ordinaire, dont l'axe sera situé sur cette perpendiculaire prolongée s'il le faut, ce qui arrive si la Courbe est convexe du côté de son axe, mais alors le parametre de la parabole osculatrice est négatif.

67. COROLLAIRE II. De-là on peut conclure que ce n'est qu'aux points singuliers que la courbure d'une Courbe peut être différente de la courbure au sommet de la parabole ordinaire, ou d'une nature différente de la courbure circulaire.

De la figure des Courbes dans un espace fini.

68. Supposons d'abord que l'ordonnée y est égale à une fonction rationelle de x, dans ce cas y ne sera jamais imaginaire & la Courbe s'étendra à l'infini du côté des abscisses négatives, aussi-bien que du côté des positives. Soit, par exemple, $y = \frac{(x+a).(x-b).x}{a^2}$, supposant $x = \infty$, on a $y = \frac{x^3}{a^2}$; donc la Courbe a deux branches infinies du genre parabolique, dont les branches de la parabole $y = \frac{x^3}{a^2}$ sont les asymptotes curvilignes; l'une de ces branches a les abscisses & les ordonnées positives, l'autre n'a que des abscisses & des ordonnées négatives. Prenant le point a (fig. 34)

pour l'origine, & la ligne $c\,b$ pour l'axe des abſciſſes, faiſant l'abſciſſe poſitive $a\,b = x = b$, le facteur $x - b$ deviendra $= 0$; donc au point b l'ordonnée y eſt $= 0$, & la Courbe paſſe par le point b. Suppoſant $x = 0$, on a encore $y = 0$; donc la Courbe paſſe par le point a. Prenant du côté des x négatifs $a\,c = a$, le facteur $x + a$ deviendra $- x + a = - a + a = 0$; donc la Courbe paſſe encore par le point c. La tangente de la Courbe au point a fait, avec la ligne des abſciſſes, un angle, dont le ſinus eſt au coſinus comme $b : a$; pour le point b cet angle eſt tel que ſon ſinus eſt à ſon coſinus comme $b.(a + b) : a^2$, & comme $a + b : a$ pour le point c. Depuis a juſqu'en b les ordonnées ſont négatives, mais elles ſont poſitives depuis b juſqu'à l'infini. Si $b = 0$, la partie $a\,d\,b$ s'évanouit & la ligne des abſciſſes devient tangente de la branche $a\,f$ (fig. 35). Enfin donnant pluſieurs valeurs ſucceſſives à x, on menera les ordonnées correſpondantes aux abſciſſes aP, $a\,h$, $a\,k$, &c. (fig. 34), ou $a\,h$, aP, &c. (fig. 35), & l'on connoîtra par-là la figure de la Courbe dans un eſpace fini.

Si on avoit l'équation $y = \pm \sqrt{(2ax - x^2)} \pm \sqrt{(ax - x^2)}$, pour connoître la figure de la Courbe, faiſant $\sqrt{(2ax - x^2)} = z$, décrivez le cercle $a\,h\,b\,d$ (fig. 36) de cette derniere équation, dont le rayon ſera $= a$. Faiſant de même $\sqrt{(ax - x^2)} = u$, décrivez le cercle $a\,t$C$\,s$ dont le rayon $= \frac{a}{2}$. A tous les points g du premier cercle appliquez gM & $g\,m$, chacune égale à fL, enſorte que les ordonnées $f\,g$ ſoient augmentées & diminuées de la quantité correſpondante fL; les points M & m ſeront à la Courbe cherchée. On fera la même choſe pour chaque

ordonnée fh correſpondante, & l'on aura la Courbe $arnta$Mdq, qui ſera compoſée de deux feuilles, & dans laquelle $y = \pm z \pm u$.

Si l'ordonnée y étoit égale à une fonction radicale de x, qui renfermât une autre fonction radicale de x, par exemple, ſi on avoit $y = \pm \sqrt{(a^2 + x^2 \pm \sqrt{(a^4 - x^4)})}$, dans ce cas on ne pourroit trouver la figure de la Courbe, qu'en donnant ſucceſſivement pluſieurs valeurs à x, & calculant pour chacune de ces valeurs, la valeur correſpondante de y. En un mot on ſuivroit la méthode ci-deſſus (2).

Des lignes Courbes décrites par le moyen des inſtruments.

69. PROBLÊME. *D'un point a (fig. 37) ſitué hors d'une droite ut, ayant abaiſſé ſur cette droite la perpendiculaire ab, prolongée juſqu'en d, on demande la nature de la Courbe que décrira l'extrêmité de la ligne ad prolongée autant qu'il le faut, pendant le mouvement de cette ligne autour du point a, en ſuppoſant qu'on prenne toujours l'interceptée $rn = bd$.* Suppoſons que ad eſt parvenue dans la ſituation an, du point n de la Courbe tirez nm perpendiculaire ſur ad. Faiſons, $mn = y$, $ab = a$, $bd = rn = b$, $am = x$, & $mb = x - a$. Le triangle rectangle amn donne $an = \sqrt{(y^2 + x^2)}$; mais à cauſe des paralleles br & mn, l'on a $\sqrt{(y^2 + x^2)} : x :: b : x - a$, ou en quarrant, $y^2 + x^2 : x^2 :: b^2 : x^2 - 2ax + a^2$, & par ſouſtraction $y^2 : x^2 :: b^2 - x^2 + 2ax - a^2 : x^2 - 2ax + a^2$. Faiſant le produit des extrêmes

&

& celui des moyens, & retranchant le second du premier, il vient

$$\begin{aligned} &x^2y^2 + x^4 = 0 \\ -2axy^2 &- 2ax^3 \\ +a^2y^2 &+ a^2x^2 \\ &- b^2x^2 \end{aligned}$$

Si on suppose $bc = bd = a$, l'équation ci-dessus, qui renferme les deux Courbes décrites par les points d & c, en supposant qu'on prenne toujours $rq = b$, deviendra plus simple à cause des termes qui se détruiront *. La Courbe dont nous venons de trouver l'équation, s'appelle la *Conchoïde de Nicomede*, qui en est l'inventeur; nous appellerons la Courbe dn *Conchoïde ultérieure*, & la Courbe cq *Conchoïde citérieure*. La Conchoïde ultérieure a la même figure dans quelque hypothese que ce soit, c'est-à-dire, que s'écartant de part & d'autre du point d, elle s'approche de la ligne ut, vers laquelle elle tourne d'abord sa concavité; mais bientôt elle se fléchit en sens contraire & tourne sa convexité vers ut, en s'approchant toujours de cette ligne qui est son asymptote **. La Conchoïde citérieure, représentée par la même équation, a pour asymptote la même ligne ut; mais si b est $< a$ & que le point c soit situé entre a & b, elle présente d'abord sa concavité & bientôt après sa convexité à la ligne ut,

* Si l'on suppose $aM = x$, $qM = y$, & qu'on fasse attention que qM est parallele à br, on verra aisément que $\sqrt{(y^2 + x^2)} : x :: b : a - x$, ou $y^2 + x^2 : x^2 :: b^2 : a^2 - 2ax + x^2$, d'où l'on tire la même équation que nous avons déja trouvée pour la Conchoïde ultérieure.

** Car en supposant que $rn = b$ représente le sinus total, np sera le sinus de l'angle $nrp = arb$; or à l'infini cet angle est infiniment petit; donc à l'infini $np = \frac{1}{\infty}$; donc, &c.

de laquelle elle s'approche continuellement, à proportion que an fait un plus grand angle avec da. Si $b = a$, & que les points c & a tombent l'un sur l'autre (fig. 38), les branches auront pour tangente commune au point a, la ligne ba, & le point a sera un point de rebroussement de la premiere espece, parce que les branches de cette Courbe en partant du point a pour s'approcher de leur asymptote se présentent leur convexité.

Enfin si $b > a$ (fig. 39) & que le point c tombe sur le prolongement de ba, l'une des branches sera $cqat$, l'autre cam, de sorte que dans ce cas la Conchoïde citérieure est accompagnée d'une feuille acq.

70. PROBLÊME. *Trouver l'équation de la Courbe $amqsa$ décrite par le point m du cercle km qui roule sur son égal ba* (fig. 40). Supposant qu'au commencement du mouvement le point décrivant se trouve en a ; lorsque ce point sera parvenu en m, il est visible que l'arc ab sera égal à l'arc bm. Ayant joint les centres des deux cercles par la droite ck qui passe nécessairement par le point de contact b (autrement la distance ck ne seroit pas égale à la somme des deux rayons $cb + bk$), tirez la ligne kmd jusqu'à la rencontre de ca prolongée. A cause que les arcs égaux bm, ba appartiennent à des cercles égaux, les angles acb, bkm seront égaux ; donc le triangle dck est isocelle ; donc $cd = dk$, & $dc - ac = dk - mk$, ou $da = dm$; donc la ligne droite am coupe les côtés dc, dk du triangle cdk en parties proportionnelles ; donc am est parallele à ck ; donc db qui coupe ck en deux également, coupera aussi am en deux également en t ; donc $at = tm$.

De plus db coupant en deux également la base du triangle isocelle cdk, est nécessairement perpendiculaire sur cette base & par conséquent aux rayons bc, bk; donc 1° elle est tangente aux deux cercles; donc 2° elle est perpendiculaire à la ligne am, parallele à ck. Menons mn perpendiculaire sur cd, & appellant r le rayon cb ou bk, faisons $cn = x$, $an = cn - ac = x - r$, $mn = y$, $(am)^2 = (mn)^2 + (na)^2 = y^2 + (x-r)^2$, $at = \frac{\sqrt{(y^2+(x-r)^2)}}{2}$. A cause des triangles semblables cdb, adt, l'on a $cb : at :: cd : da$, ou *subtrahendo*, $cb : cb - at :: cd : ca$, ou $r : r - \frac{\sqrt{(y^2+(x-r)^2)}}{2} :: cd : r$; donc $cd = \frac{r^2}{r - \frac{\sqrt{(y^2+(x-r)^2)}}{2}}$; mais les triangles cbd, nam ayant les angles en a & c égaux, & les angles en b & n droits sont semblables & donnent $cd : cb :: am : an$, ou $\frac{r^2}{r - \frac{\sqrt{(y^2+(x-r)^2)}}{2}} : r :: \sqrt{(y^2+(x-r)^2)} : x - r$, ou (en multipliant les deux premiers termes par le diviseur du premier, & les divisant par r) $r : r - \frac{\sqrt{(y^2+(x-r)^2)}}{2} :: \sqrt{(y^2+(x-r)^2)} : x - r$; donc égalant le produit des moyens à celui des extrêmes, $rx - r^2 = r\sqrt{(y^2+(x-r)^2)} - \left(\frac{y^2+(x-r)^2}{2}\right)$, ou transposant, développant $(x-r)^2$ & réduisant,

$\frac{x^2 + y^2 - r^2}{2} = r\sqrt{(y^2 + (x - r)^2)}$, ou ôtant la fraction, & faisant les opérations ordinaires

$$\begin{array}{l} y^4 + 2x^2y^2 + x^4 = 0 \\ \quad - 6r^2y^2 - 6r^2x^2 \\ \qquad\qquad + 8r^3x \\ \qquad\qquad - 3r^4 \end{array}$$

équation qui exprime la nature de la Courbe *amsa*, qu'on appelle *Epicicloïde*.

71. PROBLÊME. *Supposant une équerre nam (fig. 41) , dont les branches soient d'une longueur quelconque , mobile par son sommet a , autour de l'extrêmité a de la ligne ab , supposant en même temps qu'une ligne indefinie mn perpendiculaire sur ab , se meuve de a en b parallelement à elle-même , on demande l'équation de la Courbe ano , que décrit le point de concours n des lignes adn , mn , tandis que le concours m des lignes am , nm décrit la Courbe amb.* Soit $ap = x$, $pm = z$, $pn = y$. A cause de l'angle droit nam & de la ligne ap perpendiculaire sur l'hypothénuse nm du triangle rectangle nam, on a $pm : ap :: ap : pn$, ou $z : x :: x : y$; donc $z = \frac{xx}{y}$. Si dans cette valeur de z vous substituez sa valeur en x donnée par l'équation de la Courbe amb, dont ap est l'abscisse & pm l'ordonnée, vous aurez l'équation de la Courbe cherchée.

Soit amb un demi-cercle dont le diametre $ab = 2a$, pm, ou z sera $= \sqrt{(2ax - x^2)}$, & l'on aura l'équation $\sqrt{(2ax - x^2)} = \frac{x^2}{y}$, ou en quarrant, $2ax - x^2 = \frac{x^4}{y^2}$, ou $y^2 = \frac{x^4}{2ax - x^2}$, ou $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

On trouve la même équation si on propose ce·

Problême. Ayant décrit un demi-cercle adb sur le diametre ab, par l'extrémité duquel on a mené la perpendiculaire indéfinie bu, du point a menant à tous les points u de ub des lignes anu, en faisant toujours un égale à la corde correspondante ad, quelle est la nature de la Courbe qui passe par tous les points n ainsi déterminés? Cette Courbe est appellée la *Cissoïde de Dioclès* son inventeur. Mais démontrons que dans la Courbe dont nous venons de trouver l'équation, on a toujours $un = da$. Ayant tiré la ligne dm, à cause de l'angle droit dam, $dalm$ sera une demi-circonférence & dm un diametre; mais l'angle amb est droit, parce qu'il est appuyé sur le diametre ba; donc mb est parallele & égale à da; donc bm est parallele à nu; donc $unbm$ est un parallélogramme; donc $un = bm = ad$; donc la Courbe dont nous avons trouvé l'équation est la Cissoïde de Dioclès.

COROLLAIRE I. De l'équation $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$, on tire $y = \pm \sqrt{\left(\frac{x^3}{2a - x}\right)}$; donc à chaque abscisse ap répondent deux ordonnées égales pn, pq, l'une positive, l'autre négative. Si l'on suppose $ap = x = ab = 2a$, l'on aura $2a - x = 0$ & $y^2 = \frac{x^3}{0} = \infty$; donc les deux ordonnées qui répondent au point b sont infinies, & la Courbe a deux branches qui, partant du point a (qui est un point de rebroussement de la premiere espece) vont toujours en s'écartant de l'axe ab. La ligne ut est l'asymptote de la Cissoïde : car lorsque la ligne $ad = nu$ devient $= \frac{1}{\infty}$, le point n & le point u

s'approchent infiniment, de même que le point n & le point o; donc, &c.

COROLLAIRE II. De l'équation $z = \frac{x^2}{y}$, on peut tirer aisément l'équation d'un très-grand nombre de Courbes : car supposons que l'équation de la Courbe alb est $b^{m-n} x^n = z^m$, ou $z = b^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n}{m}} = \frac{x^2}{y}$, on aura (en prenant les puissances m) $b^{m-n} x^n = \frac{x^{2m}}{y^m}$. Multipliant par y^m, divisant par $x^n b^{m-n}$ & faisant $\frac{1}{b^{m-n}} = p^{n-m}$, on a $y^m = p^{n-m} x^{2m-n}$, équation de la Courbe dans ce cas.

Si la courbe alm étoit une hyperbole équilatere, dont le premier axe fût $= 2a$, on auroit $z = \sqrt{2ax + x^2} = \frac{x^2}{y}$, ou $2ax + x^2 = \frac{x^4}{y^2}$, ou multipliant par y^2 & divisant par x, $y^2 \times (2a + x) = x^3$, & enfin $y^2 = \frac{x^3}{2a + x}$, équation de la Courbe cherchée dans ce cas. Si la Courbe alm étoit une paraboloïde désignée par l'équation $ax^m + bx^n + d = z$, on auroit $\frac{x^2}{y} = ax^m + bx^n + d$, ou $y = \frac{x^2}{ax^m + bx^n + d}$, qui seroit l'équation de la Courbe ano.

72. PROBLEME. *Quelle est la nature de la Courbe que décrira le point a de l'équerre man, dont la branche am = a, en supposant que l'extrêmité m de cette branche se meut sur la ligne nm, & que l'autre branche indéfinie a toujours un de ses points sur le point fixe n de la ligne indéfinie np?*

Soit $np = x$, $pa = y$. A cause de ap perpendiculaire sur l'hypothénuse nm du triangle rec-

rangle nam, l'on a $np : pa :: pa : pm$, ou $x : y :: y : pm = \frac{y^2}{x}$. Mais le triangle rectangle pam donne $(am)^2 = (ap)^2 + (pm)^2$, ou $a^2 = y^2 + \frac{y^4}{x^2}$; donc $a^2 x^2 = y^2 x^2 + y^4$, ou $y^4 + y^2 x^2 - a^2 x^2 = 0$, équation de la Courbe.

Des Courbes dont on trouve l'équation par des propriétés données qui dépendent de plusieurs points de section.

73. Étant donnée une Courbe $mdng$ (fig. 41), dont l'axe des abscisses soit ab, & dont bm & bn soient deux ordonnées correspondantes à la même abscisse ab, la somme $bm + bn$ des ordonnées, leur produit, la somme de leurs quarrés, & en général la somme de leurs puissances quelconques peut être supposée donnée, ou par des constantes, ou par une fonction de $x = ab$. A cause qu'à l'abscisse ab répondent deux ordonnées bm, bn, la valeur de y sera double; donc elle sera déterminée par une équation de cette forme $y^2 - 2my + n = 0$. Cette équation étant résolue par la méthode du second degré, donne deux racines $y = m \pm \sqrt{(m^2 - n)}$. C'est de ces valeurs de y qu'on doit tirer l'équation qu'exige la propriété donnée (m & n doivent être données toutes les deux, ou au moins l'une des deux par une fonction de la variable x, l'autre étant une constante si la propriété demandée l'exige) & dont la valeur substituée dans l'équation supposée donnera les Courbes qui jouissent de la propriété donnée.

74. PROBLÊME. *Déterminer les Courbes dans lesquelles le rectangle* $bm \times bn = p$. Donc bm, bn

$= (m + \sqrt{(m^2 - n)}) \times (m - \sqrt{(m^2 - n)}) = + n = p.$ Substituant la valeur de n dans l'équation générale, on aura $y^2 - 2my + p = 0$, qui donnera la Courbe qui jouit de la propriété demandée quelle que soit la valeur de m. Si p est une quantité constante $= a^2$ & $m = a + dx$, l'on aura $y^2 - (2a + 2dx).y + a^2 = 0$, équation à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes *; en effet on sait que cette propriété convient à l'hyperbole. Si $m = \frac{x^2}{a}$, l'équation devient $y^2 - \frac{2x^2y}{a} + p = 0$. Si $p = x^3$, on a $y^2 - \frac{2x^2y}{a} + x^3 = 0$, ou $ay^2 - 2x^2y + ax^3 = 0$, équation qui appartient à une ligne du troisieme ordre, qui a la propriété demandée.

75. PROBLÊME. *Trouver les Courbes dans lesquelles la somme $bm + bn$ de deux ordonnées correspondantes à la même abscisse ab est $= p$.* Puisque le coefficient du second terme d'une équation pris avec un signe contraire est égal à la somme des racines (voyez l'Algebre), on a $2.m = bm + bn$; donc l'équation générale devient $y^2 - py + n = 0$, quelle que soit la valeur de n. Soit $p = 2x$, & $n = 3x^3$, on aura $y^2 - 2yx + 3x^3 = 0$, équation à une Courbe, dont la somme des ordonnées est double de l'abscisse. Soit $p = 2a$, $n = a^2 - \frac{x^3}{a}$, l'équation deviendra $y^2 - 2ay +$

* Pour comprendre comment cette équation appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, on n'a qu'à se rappeller (16) qu'il suffit pour cela que le quarré des ordonnées manque dans l'équation; or en changeant y en x & réciproquement, ce quarré manque; donc, &c.

$a^2 - \frac{x^3}{a} = 0$, ou $(y-a)^2 . a = x^3$, ou (en faisant $y - a = z$) $x^3 = a z^2$, équation à la seconde parabole cubique. Pour le faire voir, supposons que Mfd (fig. 43) représente la seconde parabole cubique, a étant l'origine & ab l'axe des x. Prenez af parallele aux ordonnées & $= a$, par le point f menez fg parallele à cb; par le point f pris pour sommet, décrivez (en prenant fg pour l'axe des abscisses) la seconde parabole cubique, dans laquelle les cubes x^3 des abscisses fg sont égaux aux quarrés des ordonnées cg multipliés par a. Ayant mené une double ordonnée quelconque bm, bn on a toujours $bm + bn = 2a$. Au point c où $bm = 0$, on a $cd = 2a$, & en p où l'ordonnée pM est négative on a $p\mathrm{N} - p\mathrm{M} = 2a$.

76. PROBLÊME. *Trouver les Courbes dans lesquelles* $(bm)^2 + (bn)^2 = p$. Par la nature du Problême on a $p = (m + \sqrt{(m^2 - n)})^2 + (m - \sqrt{(m^2 - n)})^2 = 4m^2 - 2n$; donc en divisant par 2 & transposant, $2m^2 - \frac{p}{2} = n$. Substituant cette valeur de n dans l'équation générale, on aura $y^2 - 2my + 2m^2 - \frac{p}{2} = 0$. Supposons $p = 2a^2$ & $m = \frac{ax}{f}$, pour avoir l'équation $y^2 - \frac{2axy}{f} + \frac{2a^2x^2}{f^2} - a^2 = 0$, qui est à l'Ellipse.

Pour construire cette équation, prenez $af = f$ (fig. 44), $fd = a$, ap égale & parallele à fd, tirez la ligne ad, & supposant les demi-diametres conjugués ap, ad, sur ces lignes prolongées de part & d'autre du centre a, décrivez l'Ellipse mdp *.

* L'équation par rapport aux diametres conjugués dont

Ayant mené une ligne quelconque mbn, on aura toujours $(bm)^2 + (bn)^2 = 2a^2 = 2 \times (ap)^2$, & si $ap = ad$ & que l'angle pad soit droit, l'Ellipse se changera en cercle, de sorte que l'Ellipse & le cercle ont cette propriété.

77. PROBLÊME. *Trouver une Courbe dans laquelle* $(bm)^3 + (bn)^3 = p$ (fig 41). On aura donc $p = (m + \sqrt{m^2 - n})^3 + (m - \sqrt{m^2 - n})^3 = 8m^3 - 6mn$; donc (en transposant & divisant par $6m$) $\frac{4m^2}{3} - \frac{p}{6m} = n$; donc l'équation générale deviendra $y^2 - 2my + \frac{4}{3}m^2 - \frac{p}{6m} = 0$. Si $p = 2ax^3$ & $m = x^2$, on a $y^2 - 2x^2y + \frac{4}{3}x^4 - \frac{ax}{3} = 0$, ou $3y^2 - 6x^2y + 4x^4 - ax = 0$, qui représente une ligne du quatrieme ordre qui a la propriété demandée. Si $p = 6a^2$ & $m = x$, on a $y^2 - 2xy + \frac{4}{3}x^2 - \frac{a^2}{x} = 0$, ou $3y^2x - 6x^2y + 4x^3 - a^2 = 0$, équation qui représente une ligne du troisieme ordre, qui a aussi la propriété demandée. Si $m = x^8$ & $p = 6a^8x^{28}$, on aura $y^2 - 2x^8y + \frac{4}{3}.x^{28} - a^8x^8 = 0$, ou $3y^2 - 6x^8y + 4x^{28} - 3a^8x^8 = 0$, équation qui peut

---

il s'agit ici sera $u^2 = \frac{a^2}{g^2} \times (g^2 - z^2)$, ou $u = \pm \frac{a}{g} \times \sqrt{(g^2 - z^2)}$, en faisant $ad = g$, $aP = z$, $Pn = Pm = u$. Or en donnant successivement plusieurs valeurs à z, on décrira facilement la Courbe de la maniere que nous l'avons enseigné (2); de sorte qu'en menant les ordonnées Pm, Pn correspondantes à chaque abscisse aP, l'on aura une Ellipse d'autant plus exacte que les valeurs de u seront plus exactes & les u plus proches les uns des autres.

représenter une Courbe d'un ordre quelconque, & qui jouit de la propriété demandée.

Nous avons supposé dans les Problêmes précédents que les ordonnées étoient paralleles entre elles. Mais si les sécantes de la Courbe doivent partir d'un point que nous appellerons le *pole* de la Courbe, il est nécessaire d'exprimer la nature de la Courbe d'une autre maniere que nous n'avons fait jusqu'ici. Soit une ligne fixe bc (fig. 45) de l'extrêmité b de laquelle on tire des lignes bn qui doivent rencontrer la Courbe, il faut exprimer la nature de la Courbe par une équation entre les lignes bm (z) & une quantité dépendante de l'angle variable $mbc = q$, comme seroit sin. q, cos. q, tang. q, &c.

78. Nous allons donner une méthode par laquelle faisant les coordonnées perpendiculaires $bp = x$ & $pm = y$, de l'équation entre z & q on peut tirer l'équation entre y & x & réciproquement. Le triangle rectangle bpm donne $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Le même triangle (en faisant le rayon $= r$) donne $\sqrt{(x^2 + y^2)} : y :: r :$ sin. q; donc $\frac{\text{sin. } q}{r} = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ (A). Il est visible encore que $\text{cos. } q : r :: x : \sqrt{(x^2 + y^2)}$; donc $\frac{\text{cos. } q}{r} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ (B). Le même triangle donne $x : y :: r : \text{tang. } q$ & $\frac{\text{tang. } q}{r} = \frac{y}{x}$. Pour les quantités dépendantes de z & de q, substituez leurs valeurs en x & y, & de l'équation entre z & q vous passerez à l'équation entre x & y. Si dans l'équation A vous substituez z à la place de $\sqrt{(x^2 + y^2}$, vous

aurez (en multipliant par z) $y = \frac{\text{sin. } q. z}{r}$. Faisant la même substitution dans l'équation B, & multipliant ensuite par z, on aura $x = \frac{z \text{ cos. } q}{r}$. Substituant ces valeurs de x & de y dans l'équation entre x & y, vous aurez l'équation entre z & q.

Si la propriété demandée exige deux secantes bm, bn, situées sur la même ligne, on prendra l'équation du second degré $z^2 - 2mz + n = 0$ (D), dans laquelle m & n sont censées être données par l'angle q, commun aux deux secantes, on déterminera ensuite m, ou n par la propriété demandée.

79. PROBLÊME. *Trouver la Courbe dans laquelle le produit de deux sécantes bm, bn, situées sur la même ligne & tirées d'un même point b jusqu'à la rencontre de la Courbe, est une quantité constante $= a^2$.* Puisque le produit des racines d'une équation du second degré est égal au dernier terme, on aura $n = a^2$; donc l'équation générale D deviendra $z^2 - 2mz + a^2 = 0$. Si l'on suppose $m = \frac{b \text{ cos. } q}{r}$, on aura $z^2 - \frac{2b \text{ cos. } q. z}{r} + a^2 = 0$. Si dans cette équation on substitue $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ à la place de z & $\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ au lieu de $\frac{\text{cos. } q}{r}$, elle deviendra $x^2 + y^2 - 2bx + a^2 = 0$. Pour construire cette équation prenez $bc = b$ & $cd = \sqrt{(b^2 - a^2)}$. Du point c pris pour centre avec le rayon cd, décrivez un cercle & vous aurez la Courbe demandée. En effet $bd = b - \sqrt{(b^2 - a^2)}$ & $bf = b + \sqrt{(b^2 - a^2)}$; or par la propriété

du cerce (voyez la Géométrie) $bm \times bn = bf \times bd = (b + \sqrt{b^2 - a^2}) \times (b - \sqrt{b^2 - a^2}) = a^2$; donc la Coube cherchée est un cercle.

80. PROBLÊME. *Trouver la Courbe dans laquelle la somme des deux sécantes $bm + bn$ est une quantité constante $= 2a$.* Parce que le coefficient du second terme d'une équatio pris avec un signe contraire est égal à la somme des racines, on aura $2m = 2a$ & $m = a$; donc l'équation I deviendra $z^2 - 2az + n = 0$. Si $n = \frac{a.b.r}{\text{cos}.q}$; à cause de $\frac{\text{cos}.q}{r} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ (78), on aura $\frac{r}{\text{cos}.q} = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x}$. Substituant les valeurs de $\frac{r}{\text{cos}.q}$ & de z, l'équaion deviendra $x^2 + y^2 - 2a\sqrt{(x^2 + y^2)} + \frac{ab.\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x} = 0$, ou $x^2 + y^2 - (2ax - ab) \times \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x} = 0$; ou $x^2 + y^2 = -a.(2x - b).\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x}$, ou $(x^2 + y^2)^2 = a^2.(2x - b)^2.\frac{(x^2 + y^2)}{x^2}$, ou (multiplit par x^2 & divisant par $x^2 + y^2$) $x^4 + x^2y^2 = a^2.(2x - b)^2$, équation qui appartient à une ligne du quatrieme ordre.

81. PROBLÊME. *Trouver une Courbe dans laquelle la some des quarrés de deux sécantes bm, bn soit $= p$; p étant une fonction quelconque dépendante de q, ou une quantité constante.* Les racines de l'équation D sont $z = m + \sqrt{(m^2 - n)}$, $z = m - \sqrt{(m^2 - n)}$, la somme de leurs quarrés est $4m^2 - 2n = p$; donc $n = 2m^2 - \frac{p}{2}$; & équation D devient $z^2 - 2mz + 2m^2 - \frac{p}{2} = 0$. Si p & m sont supposés des quantités constantes, l'équation, qui après l'élimination de z sera du quatrieme degré, appartiendra à un ou deux cercles. Pour le prouver, disposons l'équation de cette maniere, $z^2 - 2mz + m^2 = \frac{p}{2} - m^2$. Prenant la racine quarrée de part & d'autre, il

vient $z - m = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2} - m^2\right)}$. Si $\frac{p}{2} = m^2$, alors $z - m = o$, ou $z = m$; donc $m = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ & $m^2 = x^2 + y^2$, ou $y^2 = m^2 - x^2$, équation à un cercle dont le rayon $= m$; dans ce cas les z partent du centre, ce qui est évident : car alors l'une & l'autre sécante est $= m$, & la somme de leurs quarrés est $2m^2 = p$. Si $\frac{p}{2} < m^2$, la Courbe est imaginaire. Mais si $\frac{p}{2} > m^2$, si, par exemple, $\frac{p}{2} = 5m^2$, alors $z - m = \pm 2m$ & $z = m \pm 2m$, ou $\sqrt{(x^2 + y^2)} = m \pm 2m$, équation qui appartient à deux cercles, dont l'un a $3m$ pour rayon, tandis que le rayon de l'autre est $= -m$. Décrivez donc deux cercles concentriques (fig. 46), dont le rayon f de l'un soit $= 3m$ & le rayon bg de l'autre $= m$, & menez par le centre b les sécantes nbN, fbg qui rencontrent les deux cercles. Mais quelles sont les sécantes cherchées, dont la somme des quarrés $= p = 10.mm$. Si vous prenez les sécantes qui aboutissent à la circonférence d'un même cercle, vous verrez que la somme de leurs quarrés ne peut donner la quantité p : car $nb = 3m = bN$; donc $(bn)^2 + (bN)^2 = 18.m^2$; mais $bm = bM = m$; donc $(bm)^2 + (bM)^2 = 2.m^2$. Il est facile de voir que $(bm)^2 + (bn)^2 = m^2 + 9.m^2 = 10.m^2$; ainsi il faut prendre les sécantes qui aboutissent aux circonférences des deux cercles.

Si on suppose $p = 4a^2$ & $m = \frac{a.\text{sin}.q}{r}$, l'équation deviendra, en substituant la valeur de x & celle de z, $z^2 - 2az.\frac{\text{sin}.q}{r} + \frac{2a^2.(\text{sin}.q)^2}{r^2} - 2a^2 = o$. Mais $(\text{sin}.q)^2 = r^2 - (\text{cos}.q)^2$. Substituant cette valeur de $(\text{sin}.q)^2$ & réduisant, la derniere équation devient $z^2 - 2az.\frac{\text{sin}.q}{r} - \frac{2a^2.(\text{cos}.q)^2}{r^2} = o$. Passant ensuite à l'équation entre x & y, on trouve $(x^2+y^2)^2 - 2ay.(x^2+y^2) - 2a^2x^2 = o$, équation à une ligne du quatrieme ordre, qui jouit de la propriété que la somme des quarrés de ses sécantes est égale à une quantité constante $4a^2$.

Des Courbes semblables.

82. Dans toute équation à une ligne Courbe, entre les coordonnées perpendiculaires x & y, il doit se trouver une ou plusieurs quantités constantes, telles que a, b, c, qui désignent des lignes constantes, & qui avec les variables x & y forment par-tout des termes de la même dimension : car si dans un terme on a un produit de trois lignes multipliées les unes par les autres, il est nécessaire que chacun des autres termes contienne un produit de trois lignes ni plus ni moins, autrement il faudroit comparer un produit de trois lignes avec un produit de deux lignes, par exemple, ou de 4, ou de 5, ou de 6, &c. ce qui ne peut se faire, parce que ce sont des quantités hétérogenes. Il peut cependant arriver qu'on ait fait une ou plusieurs lignes égales à l'unité; ou qu'une ligne constante soit exprimée par un nombre différent de l'unité : comme, par exemple, si on exprimoit une ligne de trois pieds par le nombre 3. De-là il suit que si l'on avoit une équation rationnelle telle que $x^m + bx^{m-1}y + cx^{m-2}y^2 + \ldots + ay^m = 0$; en supposant que tous les coefficients b, c, &c. sont des nombres, & que tous les termes considérés par rapport à x & y sont homogenes, c'est-à-dire de même dimension, l'équation seroit composée de m facteurs de la forme $x - py = 0$, p étant un nombre réel ou imaginaire; or l'équation $x - py = 0$, est à la ligne droite (7), & cette ligne sera imaginaire si p est imaginaire. Si l'on avoit $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 0$, ou $(x+y)^3 = 0$, il est visible que l'équation renfermeroit trois lignes droites, dont chacune seroit exprimée par l'équation $x + y = 0$, ou $x = -y$, de plus ces lignes tomberoient toutes les unes sur les autres. En général une équation entre x & y, dont tous les termes sont homogenes, & qui ne contient aucune ligne constante exprimée ou sous-entendue, ne peut appartenir à une ligne courbe, mais elle représente tout au plus un assemblage ou système de lignes droites.

Supposons qu'une équation entre x & y contienne une seule ligne constante a, de sorte que les lignes a, x, y donnent par-tout des termes homogenes. Dans ce cas, selon

les différentes valeurs de a, l'équation représentera des Courbes, qui ne différeront qu'en quantité, mais qui du reste seront en tout semblables. Ainsi toutes les lignes courbes qui se trouvent dans ce cas sont censées semblables. Tels sont les cercles qui ne différent qu'en grandeur à cause de leurs rayons plus grands ou plus petits.

Pour rendre ceci plus clair, soit l'équation $y^2 + xx - 2ax = 0$ (A), qui se trouve dans le cas dont nous venons de parler. Appellons la constante a le *parametre* de la Courbe désignée par cette équation, & soit supposée A C $= a$ (fig. 47), A M B la Courbe de l'équation A, en prenant A B pour l'axe des abscisses & faisant A P $= x$, P M $= y$. Supposons maintenant que le parametre devienne $= ag$ (fig. 48), aqb étant la Courbe que l'équation représente dans cette supposition, les Courbes A M B, aqb seront semblables : car supposant $ag = \frac{a}{n}$ & prenant $ah = \frac{AP}{n} = \frac{x}{n}$, $hq = \frac{PM}{n} = \frac{y}{n}$, si à la place de a, x, y on écrit respectivement $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$, $\frac{y}{n}$, tous les termes de l'équation se trouveront divisés par nn, & en faisant disparoître le diviseur, on aura la même équation A que ci-dessus.

83. Les Courbes semblables auront cette propriété qu'en prenant les abscisses A P, ah en raison des parametres, les ordonnées correspondantes seront aussi en raison des parametres & par conséquent proportionnelles aux abscisses.

Les lignes semblablement tirées, les tangentes, soustangentes, les normales & sous-normales, les Courbes osculatrices aux points correspondants, les arcs semblables (c'est-à-dire correspondants aux abscisses A P, ah, proportionnelles aux parametres) seront des lignes dans le même rapport que les parametres, & les aires correspondantes aux abscisses A P, ah seront en raison doublée des parametres.

Il est visible que tous les cercles sont des Courbes semblables étant représentés par l'équation $2ax - x^2 = y^2$. De même toutes les paraboles vulgaires, représentées par

par l'équation $ax = y^2$, ſont des Courbes ſemblables.

84. PROBLÊME. *Etant donnée une Courbe* AMB (fig. 47), *en trouver une autre aqb* (fig. 48) *qui lui ſoit ſemblable.* Suppoſons qu'on demande que les abſciſſes AP (x) ſoient aux abſciſſes ah (p) comme $1 : n$, & que l'angle des coordonnées ſoit droit. Faites $1 : n :: AP : ah = p$ & vous aurez le point h ſitué ſur l'axe ahb, de la même maniere que le point P l'eſt ſur l'axe APB. Faites de même $1 : n :: PM (y) : q$. Prenez $hq = q$, la Courbe cherchée paſſera par le point q. L'on trouvera de même tant d'autres points que l'on voudra, qui appartiendront tous à la Courbe aqb, ſemblable à la Courbe AMB. Pour avoir l'équation à la Courbe aqb dont les coordonnées ah, hq ſont repréſentées par p & q, on remarquera que $1 : n :: AP (x) : p$, & que $1 : n :: PM (y) : q$; donc $x = \frac{p}{n}$ & $y = \frac{q}{n}$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation entre x & y, on aura l'équation entre p & q. Cette équation contiendra des fractions, dont le dénominateur ſera quelque puiſſance de n. Si l'on ôte les fractions & que les quantités n, p, q ſoient regardées ſeules comme déterminant les dimenſions de chaque terme, le nombre des dimenſions ſera le même dans chaque terme. C'eſt par là qu'on peut facilement reconnoître ces ſortes de Courbes.

Soit $y^2 = 2ax - x^2$, équation à un cercle, dont le diametre $= 2a$. Si on ſubſtitue $\frac{p}{n}$ à la place de x, & $\frac{q}{n}$ à la place de y, on a $\frac{q^2}{n^2} = \frac{2ap}{n} - \frac{p^2}{nn}$, ou $q^2 = 2anp - p^2$, équation au cercle, dont le diametre eſt $= 2na$; donc tous les cercles ſont des Courbes ſemblables.

Soit $y^2 = ax$. Subſtituant $\frac{q}{n}$ à la place de y, & $\frac{p}{n}$ à la place de x, on a $\frac{q^2}{n^2} = \frac{ap}{n}$, ou $q^2 = nap$, équation à une parabole, dont le parametre $= na$; donc toutes les paraboles vulgaires ſont des Courbes ſemblables.

REMARQUE. Quoique nous ayons dit que le nombre

des dimensions dans chaque terme d'une équation à une Courbe, doit être partout le même, néanmoins il peut se faire qu'il paroisse différent. Par exemple, nous avons trouvé que l'équation à la parabole étant $ax = y^2$, l'équation à toutes les Courbes semblables étoit $q^2 = nap$; or le second terme paroît avoir trois dimensions, tandis que le premier n'en a que deux. Cela vient de ce que la lettre n désigne un nombre & non une ligne. S'il arrive que le nombre des dimensions d'un terme soit trop petit, il faudra supposer ce terme multiplié autant de fois qu'il sera nécessaire par une ligne qu'on fera $= 1$. Si le nombre des dimensions est trop grand, on supposera ce terme divisé autant de fois qu'il est nécessaire par la ligne $= 1$, où bien on supposera qu'une ou plusieurs lettres représentent des nombres.

Des intersections des Lignes algébriques.

85. Si une ligne droite an (fig. 49) coupe une Courbe dmn aux points m & n, il est visible qu'en prenant aq pour l'axe, & a pour l'origine des abscisses, les ordonnées pm, qn qui répondent aux points d'intersection sont communes à la ligne am & à la Courbe dn. Soit la Courbe dmn une parabole, dont le parametre $= p$, faisons $ap = x$, $ad = a$, & par conséquent $dp = x - a$; or l'équation à la parabole donne $p \times dp = y^2$; donc $p.(x - a) = y^2$. Soit le cosinus de l'angle map à son sinus, comme $1 : n$, on aura $1 : n :: ap : pm :: aq : qn$, ou $1 : n :: x : y = \frac{nx}{1} = nx$; donc $y^2 = n^2 x^2$. Substituant cette valeur dans l'équation à la parabole on a $p.(x - a) = n^2 x^2$, ou $n^2 x^2 - px = - a.p$, ou $x^2 - \frac{px}{n^2} + \frac{p^2}{4n^4} = \frac{p^2 - 4n^4.p.a}{4n^4}$; & en prenant les racines, $x - \frac{p}{2n^2}$

$= \pm \frac{1}{2n^2} \sqrt{(p^2 - 4n^4.a.p)}$, & $x = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - 4a.p.n^4)}}{2n^2}$.
Il est évident que les deux valeurs de x indiquent les abscisses aq, ap, correspondantes aux ordonnées communes à la ligne droite an & à la parabole ; d'où l'on pourroit conclure, si on ne le savoit d'ailleurs, qu'une ligne droite ne peut couper une parabole qu'en deux points. Si $p^2 < 4a.p.n^4$, ou si $p < 4a.n^4$, les deux valeurs de x étant imaginaires, font voir que la ligne an ne peut couper la parabole. Si $p = 4an^4$, les racines de l'équation seront égales, & les points m & n se confondant, la ligne an sera une tangente de la parabole.

Si deux Courbes am, bm (fig. 50), ayant la même origine a & le même axe ap des x, se coupent en m, il est visible qu'à la même abscisse ap il répondra une ordonnée commune pm. Soit amn une parabole dont le parametre $= p$, & dont l'axe ad soit perpendiculaire sur ap. Par la nature de la parabole, en supposant $ag = pm = y$, $ap = x = gm$, on a $x^2 = py$. Soit la Courbe bmn une hyperbole équilatere, dont le demi-axe $ab = aB = a$. Par la nature de cette Courbe $x^2 - a^2 = y^2$; or l'équation à la parabole donne $py = x^2$, ou $y = \frac{xx}{p}$ & $y^2 = \frac{x^4}{p^2}$. Substituant cette valeur dans l'équation à l'hyperbole, on a $x^2 - a^2 = \frac{x^4}{p^2}$, ou $x^4 = p^2 x^2 - p^2 a^2$, $x^4 - p^2 x^2 = - p^2 a^2$. Complettant le premier membre, & prenant ensuite les racines, il vient $x^2 - \frac{p^2}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(p^4 - 4a^2 p^2)}$; ou $x^2 =$

$= \frac{p^2 \pm \sqrt{(p^4 - 4a^2p^2)}}{2}$, & enfin $x = \pm \sqrt{\left(\frac{p^2 \pm \sqrt{(p^4 - 4a^2p^2)}}{2}\right)}$. Si $p^4 > 4a^2p^2$, ou si $p^2 > 4a^2$, les quatre racines sont réelles & font voir que la parabole coupe la branche bmn en deux points m & n, & la branche BNM en deux points M & N. Si $p^2 < 4a^2$, ou si $p < 2a$, les quatre racines sont imaginaires, & dans ce cas la parabole ne rencontre jamais l'hyperbole. Si $p = 2a$, il vient $x = \pm \sqrt{\left(\frac{p^2 \pm 0}{2}\right)}$; donc il y aura deux racines positives égales, & les points m & n se confondant, les deux Courbes se toucheront en m. De plus, à cause de deux racines négatives égales, les points N & M se confondront, de sorte que la parabole touchera encore la branche BM en N ou en M; car dans ce cas les deux points M & N se confondent.

86. On peut conclure de ce que nous venons de dire, qu'une Courbe, dont l'équation contient y seulement linéaire (c'est-à-dire, la premiere puissance de y), étant combinée avec une autre Courbe quelconque dans l'équation de laquelle y a plusieurs dimensions, donnera autant d'intersections (on suppose que ces Courbes ont le même axe & la même origine des abscisses & les ordonnées paralleles) que l'équation qui résulte après l'élimination de y, contient des racines réelles.

Soit l'équation $p + qy = 0$, & l'équation [P] $+ Qy + Ry^2 \ldots + ty^m = 0$ (A). Les quantités p, q, P, Q, R, &c. sont des fonctions de x, ou des constantes. Il est visible que toute valeur réelle de x donne une valeur réelle de y dans l'équation $p + qy = 0$, ou $y = -\frac{p}{q}$; donc si l'on substitue

cette valeur de y dans l'équation A, il en résultera une équation en x, dont les racines réelles indiqueront un égal nombre d'intersections réelles. En effet puisqu'aux points d'intersection les ordonnées des deux Courbes sont égales, l'ordonnée de la premiere Courbe sera égale à l'ordonnée de la seconde courbe; mais l'ordonnée de la premiere Courbe est toujours réelle pour chaque valeur réelle de x; donc aux points d'intersection indiqués par les racines réelles de l'équation en x, l'ordonnée de la seconde Courbe ne peut être imaginaire : c'est-à-dire, que les points d'intersection seront réels & non imaginaires; autrement un y réel de la premiere équation seroit égal à un y imaginaire de la seconde, ce qui est absurde.

87. Mais on ne peut pas dire la même chose d'une équation $p + qy + ry^2 = 0$ (B) qui contient le quarré de y : car cette équation peut être telle qu'en substituant une certaine valeur de x dans les quantités p, q, r (si une de ces quantités ne contenoit point x, on ne pourroit faire aucune substitution pour celle-là), l'équation qui en résultera donnera deux y imaginaires; donc en substituant dans l'équation A les valeurs de y tirées de l'équation B, il pourra arriver que les deux y égaux, qui dans les deux Courbes répondent à la même abscisse réelle, soient imaginaires; parce que deux quantités imaginaires peuvent être égales entr'elles, aussi-bien que deux quantités réelles; donc dans ce cas à une valeur réelle de x il répondra une intersection imaginaire. Mais si en éliminant les puissances de y au-dessus de la premiere, on peut parvenir à deux équations qui n'ayant aucun facteur commun, contiennent chacune y seulement linéaire, il ne pourra jamais arriver que les y égaux soient

imaginaires. Si l'on ne peut parvenir à une telle équation, on ne sera pas sûr d'avoir autant d'intersections réelles que l'équation en x aura des racines réelles.

Soit la ligne du troisieme ordre représentée par l'équation $y^3 - 3ay^2 + 2a^2y - 6ax^2 = 0$ (F). A chaque abscisse réelle de cette Courbe il répond au moins une ordonnée réelle, & même trois si $x < \frac{a}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Si on combine cette Courbe avec la parabole de l'équation $y^2 = 2ax$, en substituant la valeur de y^2, on aura $2axy - 6a^2x + 2a^2y - 6ax^2 = 0$ (H); d'où l'on tire $y = \frac{6a^2x + 6ax^2}{2a^2 + 2ax} = 3x$. Mais parce que l'équation H est divisible par $y - 3x = 0$, si on fait la division, on aura $2a^2 + 2ax = 0$, qui ne contiendra plus de y; or cette derniere équation donne $x = -a$. Il paroît donc qu'on devroit avoir un point d'intersection réelle correspondant à l'abscisse réelle $x = -a$. Mais la parabole de l'équation $y^2 = 2ax$ n'ayant aucune ordonnée réelle correspondante aux abscisses négatives, il est visible qu'il ne peut y avoir aucune intersection réelle correspondante à l'abscisse $x = -a$. Si on substitue $-a$ à la place de x dans l'équation F, elle devient $y^3 - 3ay^2 + 2a^2y - 6a^3 = 0$, ou $(y - 3a) \times (y^2 + 2a^2) = 0$. Le facteur $y - 3a = 0$ donne une ordonnée réelle $y = 3a$, le facteur $y^2 + 2a^2 = 0$ donne deux racines imaginaires $y = \pm\sqrt{(-2a^2)}$. Dans la parabole en supposant $x = -a$, on a $y^2 = -2a^2$ & $y = \pm\sqrt{(-2a^2)}$; donc dans les deux Courbes les deux racines correspondantes à l'abscisse $x = -a$, sont égales & imaginaires. Le facteur $y - 3x = 0$,

donne $y = 3x$. Substituant cette valeur de y dans l'équation à la parabole $y^2 = 2ax$, ou $y^2 - 2ax = 0$, il vient $9x^2 - 2ax = 0$, d'où l'on tire $x = 0$ & $x = \frac{2a}{9}$; il y a donc deux intersections réelles, l'une correspondante à l'abscisse $x = 0$, & l'autre à l'abscisse $x = \frac{2a}{9}$.

Nous avons trouvé des intersections imaginaires quoiqu'en éliminant nous fussions parvenus à l'équation $2axy - 6a^2x + 2a^2y - 6ax^2 = 0$, dans laquelle on trouve y seulement linéaire. Cela vient de ce que cette équation ayant pour diviseur $y - 3x = 0$, après la division on trouve l'équation $2a^2 + 2ax = 0$, qui ne renferme plus y; de sorte que c'est la même chose que si y ne pouvoit être exprimé par une fonction rationnelle de x; ainsi toutes les fois qu'on parvient à une équation qui renfermant y seulement linéaire est résoluble en plusieurs facteurs, il faut examiner séparément chaque facteur, parce que l'un des facteurs peut donner des intersections réelles, tandis qu'un autre en donne d'imaginaires.

Si l'on suppose qu'en éliminant on soit parvenu à ces deux équations $(y - ax).(x^p + d) = 0$, $(y + bx).(x^p + d).(x - a) = 0$, qui ont un facteur commun $x^p + d = 0$, ce facteur pourra donner des intersections imaginaires; ainsi qu'il suit de ce que nous venons de dire. Mais si au contraire on parvient aux équations $(y - ax) \times (gx^p + x^d) = 0$, $(y + bx).x^p + cx - a = 0$, qu'on suppose n'avoir aucun diviseur commun, il n'est pas possible que deux y égaux soient imaginaires : car ils ne pourroient être des quantités imaginaires égales,

qu'à cause d'un diviseur égal qui se trouveroit dans ces équations ; or ces équations n'ont aucun diviseur commun par supposition ; donc &c. s'il arrive au contraire ou qu'on ne puisse parvenir à deux équations qui contiennent y seulement linéaire, ou que ces équations quoique contenant y seulement linéaire aient un diviseur commun (qui ne soit pas une quantité constante), on ne sera pas assuré d'avoir autant d'intersections réelles que l'équation en x aura des racines réelles.

88. Quoique dans l'Algebre nous ayons expliqué la méthode d'éliminer les inconnues d'une équation, cependant pour que le Lecteur ne soit pas embarrassé, nous allons faire voir, par un exemple, comment on peut s'y prendre pour parvenir à deux équations qui soient du premier degré par rapport à l'inconnue y.

I. $p + qy + ry^2 = 0$

II. $a + by^3 + cy^4 = 0$

III. $ra - pcy^2 + (rb - qc).y^3 = 0$

IV. $r^2a - p.(rb - qc).y + [qqc - qrb - prc].y^2 = 0$
$r^2a - p(rb - qc).y + my^2 = 0$

V. $pm - r^3a + [qm + pr.(rb - qc].y = 0$
$s + ny = 0$

VI. $pn + (qn - rs).y = 0.$

Je prends deux équations dans l'une desquelles y est élevé à la seconde puissance, l'autre contenant la quatrieme puissance de la même inconnue y. Multipliant la premiere par cy^2, je la retranche de la seconde multipliée par r (on en use ainsi afin que y^4 se trouve dans les deux équations avec des coefficients égaux), il en résulte la troisieme équation. De la troisieme équation multipliée par r, je retranche la premiere multipliée par $(rb - qc).y$ pour avoir la quatrieme, qui deviendra plus simple

en supposant que le multiplicateur de y^2 est $= m$. De la premiere multipliée par m, je retranche la quatrieme multipliée par r pour avoir la cinquieme, qui deviendra plus simple en faisant $pm - r^3 a = s$ & $qm + pr.(rb - qc) = n$. De la premiere multipliée par n, je retranche la cinquieme multipliée par ry pour avoir enfin la sixieme. Si dans la cinquieme équation n est $= 0$, on aura aussi $s = 0$. L'équation $s = 0$ détermine toutes les valeurs réelles de x. Si on substitue ces valeurs dans la premiere ou dans la quatrieme équation, y sera donné par une équation du second degré, & par conséquent il pourra être imaginaire. Dans ce cas l'équation en x peut avoir plus de racines réelles qu'il n'y a d'intersections réelles. Si l'on n'a pas $n = 0$, examinez si les cinquieme & sixieme équations ont un diviseur commun; si elles en ont un, à cause que la valeur de x qui résulte de ce facteur égalé à 0, doit être mise dans une équation du second degré par rapport à y, il en pourra résulter des valeurs imaginaires de y. Si ces équations n'ont aucun facteur commun, il y aura autant d'intersections réelles que l'équation en x contiendra de racines réelles.

Ce qu'on vient de dire par rapport à une équation qui renferme y^2, doit s'entendre des équations qui renferment $y^3 = y^2 \times y$, y^4, y^5, &c. & quand on fait usage des Courbes de ces équations pour avoir le nombre d'intersections réelles, il faut voir si en éliminant on ne peut pas parvenir à deux équations qui n'aient aucun diviseur commun, & qui contiennent y seulement linéaire. Si cela n'arrive pas, on ne peut pas assurer que le nombre des intersections réelles soit égal au nombre des

racines réelles, que contient l'équation en x.

Cependant si l'on est sûr qu'une des équations qui contient y, y^2, y^3, &c. a toutes les ordonnées correspondantes à une abscisse quelconque réelles, ce qui peut arriver quelquefois, il est inutile de recourir à la marque dont nous venons de parler : car tous les y de cette Courbe étant réels, il n'est pas possible qu'en les égalant à ceux d'une autre Courbe ils deviennent imaginaires; donc dans ce cas le nombre des points réels d'intersection sera déterminé par les racines réelles de l'équation en x, résultante de l'élimination de y.

De la construction Géométrique des Problêmes & des Equations.

89. Pour appliquer l'Algebre à la solution des *Problêmes Geométriques*, il faut d'abord exprimer par des lettres les lignes inconnues & les connues. On exprimera les lignes connues par les premieres lettres de l'alphabet, & les inconnues par les dernieres. On peut parvenir ensuite aux équations que l'on tire de la nature du Problême. Pour cela on a besoin quelquefois de beaucoup d'art & de certaines préparations, comme, par exemple, de mener des paralleles, de tirer des perpendiculaires, de faire certains angles, de décrire des cercles. Au reste la propriété des triangles semblables, dont les côtés homologues sont proportionnels, la propriété du triangle rectangle dans lequel le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés des autres côtés, les angles constants sont d'un très-grand secours dans les questions géométriques. Les équations étant trouvées & résolues, la valeur

des inconnues sera exprimée par des connues. Mais cela ne suffit pas pour la solution, lorsqu'il s'agit d'un Problême géométrique ; il faut encore que cette valeur soit exprimée en lignes, ou en d'autres quantités géométriques.

Pour ce qui regarde les équations du premier degré, on sait que la valeur de l'inconnue se trouve par l'addition, multiplication, soustraction, division des termes. De même la valeur géométrique de l'inconnue se trouve par addition, soustraction, multiplication, division des lignes, ou tout au plus par le moyen d'une troisieme ou quatrieme proportionnelle. Supposons, par exemple, qu'on propose ce problême; quelle est la ligne x qui est égale à la somme des lignes a, & c moins la ligne b? Il est évident que l'on aura $x = a + c - b$; donc si de la ligne $a + c$ on retranche b, le reste donnera la valeur de x. Si $x = \frac{a.b}{c}$, faites $c : a :: b : x = \frac{a.b}{c}$, c'est-à-dire, que la ligne x est quatrieme proportionnelle aux lignes c, a, b; or nous avons vu en Géométrie comment on pouvoit trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes ; donc il est aisé d'avoir la valeur de x. Si l'on avoit $bx = a^2$, l'on trouveroit, en divisant par b, $x = \frac{a^2}{b}$; donc $b : a :: a : x = \frac{a^2}{b}$; c'est-à-dire, que la ligne cherchée est troisieme proportionnelle aux lignes b & a; or il est facile (voyez la Géométrie) d'avoir une troisieme proportionnelle à deux lignes. Si $x = \frac{a^2 - b^2}{a - d}$, on aura $a - d : a - b :: a + b : x$

$= \frac{a^2 - b^2}{a - d}$. Soit $x = \frac{ab}{c} + \frac{bd}{n}$; si on fait $\frac{ab}{c} = f$, $\frac{bd}{n} = g$, on aura $x = f + g$; or f est quatrieme proportionnelle aux lignes c, a, b & g quatrieme proportionnelle aux lignes n, b, d; donc il est facile d'avoir f & g, & par conséquent x.

Soit $x = \frac{ab + cd}{m + n}$, on demande la valeur de x. Pour résoudre ce Problême, tout consiste, comme on peut le conclure des exemples ci-dessus, à résoudre le numérateur en deux facteurs linéaires, afin de n'avoir qu'à chercher une quatrieme proportionnelle. Pour cela il suffit de changer le premier terme ab du numérateur en un autre, dans lequel il se trouve une des lettres du second terme cd, par exemple, c; or pour cela il n'y a qu'à faire $c : a :: b : f$, c'est-à-dire, prendre f quatrieme proportionnelle aux lignes c, a, b, ce qui donne $cf = ab$ & $x = \frac{cf + cd}{m + n}$; donc $m + n : f + d :: c : x = \frac{fc + cd}{m + n} = \frac{ab + cd}{m + n}$.

Soit $x = \frac{fdcn}{abm}$. Cette fraction est égale au produit des quantités $\frac{fd}{a}$, $\frac{cn}{b}$, en divisant ce produit par m; donc si l'on fait $\frac{fd}{a} = p$, $\frac{cn}{b} = q$, on aura $x = \frac{pq}{m}$; donc $m : q :: p : x = \frac{pq}{m}$. Si $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$, faites $b : a :: a : \frac{a^2}{b} = n$; donc $a^2 = bn$ & $x = \frac{bn + bb}{c}$, ou $c : n + b ::$

$b : x = \frac{bn + bb}{c}$. Soit $x = \frac{abc - dgf}{hk + mn}$. Faites $gf = ap$, en faisant $a : g :: f : \frac{gf}{a} = p$, d'où l'on tire $gf = ap$. Faites de même $hk = aq$, $mn = ar$, vous aurez $x = \frac{abc - dap}{aq + ar} = \frac{bc - dp}{q + r}$. Faites encore $dp = bs$, & vous aurez $x = \frac{bc - bs}{q + r}$; donc $q + r : b :: c - s : x$.

Si l'on avoit $x = \frac{bcd}{m}$, on ne pourroit trouver la valeur de x qu'en supposant qu'une des lettres du numérateur représente un nombre & non une ligne. Car si toutes les lettres du numérateur sont des lignes, le numérateur représentera un solide qui, divisé par une ligne, doit donner une surface & non une ligne *.

90. Venons aux équations du second degré. Soit $x = \sqrt{(ab)}$, en élevant tout au quarré l'on a $x^2 = ab$; donc $a : x :: x : b$, c'est-à-dire, que pour avoir x il faut prendre une moyenne proportionnelle entre les lignes a & b; or nous avons appris en Géométrie à trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Soit $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, prenez deux lignes $ab = a$, $bc = b$ (fig. 51) perpendiculaires l'une à l'autre & tirez ca, le triangle rectangle abc donne $(ac)^2 = x^2 = a^2 + b^2$; donc $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; c'est-à-dire, que x est

* En effet un solide résulte de la multiplication de trois lignes les unes par les autres; donc si on divise un tel produit par une ligne, le quotient sera le produit de deux lignes & par conséquent une surface.

l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont les côtés sont a & b.

Soit $x = \sqrt{(c^2 - a^2)}$. Sur le diametre $ab = c$, décrivez un demi-cercle acb (fig. 52), & du point b comme centre & de l'intervalle $cb = a$, décrivez un petit arc qui coupe le demi-cercle en c, tirez ac & vous aurez $x = ac = \sqrt{(c^2 - a^2)}$. En effet, le triangle acb est rectangle en c; donc $c^2 = (cb)^2 + (ca)^2$ & $(ca)^2 = c^2 - a^2$; donc $ca = \sqrt{(c^2 - a^2)} = x$.

C'est à ces trois formules générales qu'il faut rapporter toutes les racines quarrées par les méthodes ci-dessus.

Soit $x = \sqrt{\left(\frac{a^3}{b} + cd\right)}$. Faites $\frac{a^2}{b} = f$, ou $b : a :: a : f = \frac{a^2}{b}$, & vous aurez $x = \sqrt{(af + cd)}$. Faites $cd = fg$ pour avoir $x = \sqrt{(af + fg)} = \sqrt{(f.(a+g))}$; donc x est moyenne proportionnelle entre f & $a + g$, ce qui se rapporte à la premiere formule. Soit $x = \sqrt{(a^2 + bc)}$. Faites $b : n :: n : c$, ou $bc = n^2$, & vous aurez $x = \sqrt{(a^2 + n^2)}$; donc x est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont les côtés sont a & n.

Soit $x = \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2 - n^2)}$. Faisant $a^2 + b^2 = f^2$ & $c^2 + n^2 = g^2$ pour avoir $x = \sqrt{(f^2 - g^2)}$, qui se rapporte à la troisieme formule générale. Soit $x = \sqrt{[a^2 + \sqrt{(b^4 + c^4)}]}$. Faisons $b^2 = cf$, pour avoir $\sqrt{(b^4 + c^4)} = \sqrt{(c^2 f^2 + c^4)} = c\sqrt{(f^2 + c^2)}$. Faisant encore $\sqrt{(f^2 + c^2)} = g$, nous trouverons $\sqrt{(b^4 + c^4)} = cg$ & $x = \sqrt{(a^2 + cg)} = \sqrt{(a^2 + n^2)}$, en faisant $cg = n^2$; or nous savons construire $\sqrt{(a^2 + n^2)}$.

91. Passons maintenant aux équations qui ren-

ferment deux inconnues x & y. On appelle *lieu géométrique d'une equation indéterminée, qui contient deux inconnues x & y, une ligne droite ou courbe, dont le rapport des coordonnées est exprimé par cette equation.* Si l'on prend la ligne mn (fig. 53) pour l'axe des x, & qu'on appelle les lignes pf, sd, sh, &c. (y), les y positifs étant situés à la gauche, & les négatifs à la droite de la ligne mn, la ligne dq sera le lieu des ordonnées positives correspondantes à la partie cn de l'axe des abscisses, & des ordonnées négatives correspondantes à la partie cm. De même la ligne indéfinie hk sera le lieu des ordonnées négatives correspondantes à cn & des ordonnées positives correspondantes à cm; de sorte que les lignes dq, hk seront le lieu des y positifs & négatifs de l'équation générale du premier degré $y = \frac{ma + mx}{n}$ que nous avons appris à construire (6). Si $x = 0$, le lieu cherché sera une ligne parallele à l'axe des abscisses, & si $y = 0$, le lieu des x sera une ligne parallele à l'axe des ordonnées. Comme nous avons suffisamment expliqué tout cela (6), il seroit inutile de nous y arrêter ici.

92. Lorsqu'on a deux équations géométriques du premier degré à deux inconnues, on peut déterminer en lignes finies la valeur de ces inconnues, lorsque cette valeur est finie. Pour le faire voir, soient les deux équations $y = \frac{ax - ab}{n}$, $y = \frac{cx - cd}{m}$. Cherchons d'abord le lieu de chaque équation. Supposant que le point a est l'origine des x, prenons $ac = b$, $cp = n$, tirons $pf = a$, faisant un angle quelconque p avec mn, menons la ligne dfq & tirons nq parallele à pf; les triangles

ſemblables cpf, cnq donneront $cp : pf :: cn = an - ca : qn\ (y)$, ou $n : a :: x - b : y = \frac{ax - ab}{n}$; donc la ligne cq ſera le lieu de la premiere équation, & les abſciſſes ſeront an, & les ordonnées nq. Cherchons maintenant le lieu de la ſeconde équation, en prenant toûjours le point a pour l'origine des x. Soit $ag = d$, $gt = m$. Menons tr parallele à nq & $= c$, & tirons l'indéfinie gr. Les triangles ſemblables grt, gob donnent $gt : tr :: gb : bo$; or $gt = m$, $tr = c$, $gb = ab - ag = x - d$, & bo eſt l'ordonnée y de la ſeconde équation; donc $m : c :: x - d : \frac{cx - cd}{m} = y$; donc la ligne gr eſt le lieu de la ſeconde équation. Maintenant ſi la ligne gr coupe la ligne cq, en quelque point q, l'ordonnée qn ſera commune aux lieux des deux équations données; donc nq ſera déterminée par la rencontre des deux lignes cq, gr. Il en ſera de même de x qui ſera $= an$; ainſi par le moyen des deux équations du premier degré, on pourra déterminer la valeur géométrique des inconnues y & x.

Pour faire mieux comprendre cette conſtruction, il eſt bon de faire quelques remarques. Si la raiſon de $n : a$ eſt égale à celle de $m : c$, on aura dans les triangles cpf, gtr, on aura, dis-je, $cp : pf :: gt : tr$; or les angles en p & t ſont égaux à cauſe des paralleles tf, tr; ainſi ces triangles ont deux côtés proportionnels adjacents à un angle égal de part & d'autre, ce qui (voyez la Géométrie) les rend ſemblables; par conſéquent les angles en c & g ſeront égaux, & les lignes cb, gr paralleles; donc ces lignes ne ſe rencontrant jamais, on ne pourra pas déterminer

déterminer les lignes x & y, qui, parce que le point q peut être regardé comme infiniment éloigné, à cause que deux paralleles peuvent être censées se rencontrer à l'infini, pourront être regardées comme infinies *. Si les raisons $n : a$, $m : c$ ne sont pas égales, les lieux se rencontreront à la vérité en quelque point q, mais il faut examiner si l'angle tgr est plus petit ou plus grand que l'angle pcf. Dans le second cas le point de concours q sera du côté de B, ainsi que le représente la figure. Mais dans le premier cas le point q sera du côté de d.

Si nous supposons $b = d$, on aura $x = b$ & $y = o$. En effet dans ce cas les points n & q tomberont sur le point c; or au point c, $x = an$ est $= ac = b$ & $nq = y = o$. C'est aussi ce que l'analyse démontre : car puisque les valeurs de y doivent être égales au point q, on aura $\frac{ax - ab}{n} = \frac{cx - cb}{m}$, ou $\frac{a}{n} \times (x - b) = \frac{c}{m} \cdot (x - b)$, ou $\left(\frac{a}{n} - \frac{c}{m}\right) \cdot (x - b) = o$; donc au moins l'un ou l'autre des facteurs du premier membre doit être $= o$; mais ce n'est pas le premier, parce que les quantités qui le composent peuvent être prises arbitrairement; donc $x - b = o$,

* Si l'on conçoit que l'angle rgt diminue de plus en plus, le point q s'éloignera toujours, & lorsque l'angle rgt approchera beaucoup d'être égal à l'angle pcf, les lignes tq, gr étant presque paralleles, se joindront à une distance extrêmement grande, laquelle sera plus grande qu'aucune distance donnée, lorsque les deux angles, dont nous venons de parler, différeront d'une quantité plus petite qu'aucune quantité donnée; ainsi lorsque ces angles seront égaux, la distance sera censée infinie.

ou $x = b$. Maintenant si dans les équations $y = \frac{ax - ab}{n}$, $y = \frac{cx - cd}{m}$, nous substituons b au lieu de x, nous souvenant qu'ici $d = b$, on trouvera par-tout $y = 0$. Il n'est pas difficile de voir ce qui arriveroit si c étoit $= 0$, ou négatif. Enfin puisque deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un point q, il est visible que les lieux dq, gr ne peuvent donner qu'une seule valeur de x & de y.

De la résolution des Equations déterminées du second degré.

93. Avant d'entrer en matiere, il sera bon de remarquer que l'équation d'un cercle, dont le rayon $= r$, est $y^2 = r^2 - x^2$, ou $y^2 + x^2 = r^2$. Cela posé, prenons l'équation générale du second degré $x^2 + cx = ab$, on peut toujours lui donner cette forme en délivrant le premier terme de son coefficient & faisant passer toutes les quantités qui ne contiennent pas x dans le second membre. Si vous multipliez cette équation par $m^2 + n^2$, vous aurez $m^2x^2 + n^2x^2 + (m^2 + n^2).cx = (m^2 + n^2) \times ab$ (Q). Faisons ensuite $nx + \frac{(m^2 + n^2).c}{2n} = my$ (P), ou $y = \frac{n}{m}.x + \frac{(m^2 + n^2).c}{2mn}$; cette équation est évidemment un lieu du premier degré. Quarrant les deux membres de l'équation P & transposant, on a $n^2x^2 + (m^2 + n^2).cx = m^2y^2 - \frac{(m^2 + n^2)^2}{4n^2}.c^2$. Substituant le second membre de cette équation dans l'équation Q, à la place du premier qui s'y trouve, nous aurons

$m^2 x^2 + m^2 y^2 - \frac{(m^2 + n^2)^2}{4 n^2} . c^2 = (m^2 + n^2) . a b$, ou transposant & divisant par m^2; $x^2 + y^2 = \frac{(m^2 + n^2)^2 . c^2}{4 n^2 m^2} + \frac{(m^2 + n^2)}{m^2} . a b$ (S); donc en multipliant & divisant le dernier terme par $\frac{m^2 + n^2}{4 n^2}$, $x^2 + y^2 = \frac{(m^2 + n^2)^2}{4 n^2 m^2} . \left(c^2 + \frac{4 n^2 . a b}{m^2 + n^2}\right)$, équation au cercle qui, comparée avec l'équation $y^2 + x^2 = r^2$, donne $r = \frac{(m^2 + n^2)}{2 n m} . \sqrt{\left(c^2 + \frac{4 n^2 a b}{m^2 + n^2}\right)}$; donc en décrivant un cercle $b g d q$ (fig. 54) avec le rayon r que nous venons de trouver, on aura le lieu de la derniere équation, dont les abscisses, en les comptant du centre c, sont $cf = x$, & les ordonnées $fg = y$.

Disposons à présent le lieu de l'équation $y = \frac{n}{m} x + \frac{(m^2 + n^2) . c}{2 m n}$ (T), en sorte que les x des deux lieux ayant la même origine, soient situés sur la même ligne. Soit $c.a = \frac{(m^2 + n^2) . c}{2 n n}$ & tirons ch perpendiculaire sur bd & telle que l'on ait $m : n :: ca : ch$; menant la ligne $g h a q$ par les points a & h, on aura le lieu demandé qui coupera le cercle en q & g. Si des points g & q on tire les ordonnées gf & qp, les abscisses cf, cp seront les racines de l'équation proposée. En effet, à cause qu'aux points q & g les y du cercle sont égaux aux y de la ligne gq, les x (cf, cp) doivent être les mêmes pour les deux lieux. De plus si l'on prend la valeur de y dans l'équation T, & qu'on

ſubſtitue la valeur de ſon quarré à la place de y^2 dans l'équation S, on trouvera l'équation Q, qui, en diviſant par $m^2 + n^2$, ſe réduit à l'équation propoſée.

Si le point a tombe en dedans du cercle, l'équation aura toujours deux racines réelles, parce que dans ce cas la ligne gq coupe le cercle en deux points, deſquels ſi on abaiſſe des perpendiculaires ſur le diametre, elles détermineront cf, cp, ou les x de l'équation. Si le point a tombe hors du cercle, il peut arriver trois cas, ou la droite ah coupera le cercle, ou elle le touchera, ou bien elle ne le rencontrera point. Dans le premier cas il y aura deux racines réelles; dans le ſecond ces deux racines ſeront égales, parce qu'alors les deux points de ſection ſe confondant, les deux x tombent l'une ſur l'autre. Dans le troiſieme cas, qui ſuppoſe $ch > r = cb$, les racines ſeront imaginaires.

Solution de quelques Problêmes géométriques.

94. PROBLÊME. *Etant donnée une droite ab diviſée en c, comme on le voudra, on demande de faire le prolongement bp (fig. 55), tel que le quarré de cp ſoit égal au rectangle $ap \times bp$.* Soit $ab = a$, $cb = b$, $bp = x$. Par la nature du Problême $ap \times bp = (cp)^2$, ou $(a+x).x = (b+x)^2$, ou $x^2 + ax = x^2 + 2abx + b^2$. Retranchant x^2 de part & d'autre & tranſpoſant, il vient $ax - 2bx = b^2$, d'où l'on tire $x = \frac{b^2}{a-2b}$; donc $a - 2b : b :: b : x = \frac{b^2}{a-2b}$. C'eſt-à-dire, que bp eſt troiſieme proportionnelle aux lignes $a - 2b$ & b. Pour conſtruire x, prenez $cd = b$, pour avoir $ad = a - 2b$, des points c & b menons les lignes paralleles cl, bh, dont la premiere ſoit $= ad$, la ſeconde $= cb$, tirons lb, & par le point h menons-lui la parallele hp, cette ligne déterminera la valeur cherchée de x. En effet, les triangles

lcb, phb sont évidemment semblables; donc $cl : cb :: hb : bp$, ou $a - 2b : b :: b : \frac{b^2}{a - 2b} = x$. Si $b < \frac{a}{2}$, le point d tombera entre a & c, & la construction précédente aura lieu. Si $b = \frac{a}{2}$, le point d tombera sur le point a, ce qui donne $ad = o$. Donc aussi cl sera $= o$; le point l tombera sur le point c, lb se confondra avec cb & l'on aura $x = \frac{b^2}{o} = \infty$. Enfin si $b > \frac{a}{2}$, le point d tombera en-deçà de a, ad sera négatif, & l'on menera cl du côté opposé, hb étant toujours située de la même façon; donc hp parallele à lb, coupera ab prolongée s'il le faut, coupera, dis-je, ab en-deçà de b.

95. PROBLÊME. *Inscrire un quarré $fdpg$ dans un triangle bac (fig. 56), de maniere que l'un de ses côtés tombe sur la base de ce triangle.* Supposant la chose faite, du sommet a de l'angle opposé à la base abaissez ah perpendiculaire sur bc. Soit la base $bc = a$, $ah = b$, $ht = df = dp = x$. Les triangles semblables abh, fta, donnent $ah : at :: ab : af$. Les triangles semblables afg, abc donnent $ab : af :: bc : fg = dp$; donc $ah : at :: bc : dp$, ou $b : b - x :: a : x$, *alternando* & *componendo*, $b + a : a :: b : x$.

Pour construire x, prenez $hm = bc$ & $mn = ah$ pour avoir $hn = a + b$. Ayant tiré an, menez par le point m la ligne mt parallele à na, cette ligne déterminera le point t de la perpendiculaire ah, par lequel menant fg parallele à bc, vous aurez le côté fg du quarré demandé. En effet, à cause des triangles semblables anh, mth, l'on a $hn : mh :: ah : th$, ou $b + a : a :: b : x$. Si l'angle acb est aigu, la construction précédente a lieu; si cet angle est droit, le côté gp tombera sur gc. Si l'angle c est obtus (fig. 57) on aura à la vérité un quarré $fgdp$, mais non pas inscrit dans le triangle bac.

96. PROBLÊME. *Etant donné (fig. 58) un cercle acn & un point b situé hors de ce cercle, du centre p tirant la*

ligne $b p$, rencontrée en b par la ligne $d b$, on demande le point d, auquel du centre p ayant mené la ligne $p d$, on ait l'interceptée $d c$ en raison donnée avec la ligne $b d$. Soit la raison donnée $m : n$. Par le point p menez $p m$ parallele à $b d$ & faites $m : n :: p n : p m$ & menez $b m$. Par c l'un des points, où $b m$ rencontre le cercle, menez $p c d$ & vous aurez deux points d & b qui détermineront la ligne cherchée $b d$; car les triangles semblables $p m c$, $b c d$ donnent $bc : db :: pc = pn : pm :: m : n$. Si $m = n$, dc sera $= d b$ & le point m tombera sur le point n. Si $b m$ devient tangente, les points c & C, par lesquels on doit tirer la ligne $p d$, se confondront, & dans ce cas le Problême n'aura qu'une solution; c'est-à-dire, qu'un seul point d pourra résoudre le Problême.

97. PROBLÊME. *Ayant divisé la ligne $a b$ (fig. 59) en deux parties $a c$, $b c$, sur la plus grande $a c$ décrivez un triangle équilatéral $a g c$; faites la même chose sur la plus petite $c b$, & joignant les sommets de ces triangles par la ligne $g f d$ prolongée jusqu'à la rencontre de $a b$, du point d comme centre & de l'intervalle $d c$ décrivez un cercle* *; *on demande de trouver dans la circonférence de ce cercle un point m tel qu'ayant mené $m a$, $m b$, l'on ait $a c : b c :: m a : m b$.* Cherchons d'abord le rayon $d c$ de ce cercle. Les triangles semblables $d a g$, $d f c$ ** donnent $d g : c f$, ou $a c : c b :: a d : c d$, & *dividendo* $a c - c b : c b :: a c : c d$; donc faisant $c a = a$, $c b = b$, $d c = r$, on aura $a - b : b :: a : r = \frac{b a}{a - b}$. Soit présentement la perpendiculaire $p m = y$ & l'abscisse $c p = x$, l'équation au cercle sera $2 r x - x^2 = y^2$. Mais par la propriété du triangle rectangle $a m p$, l'on a $a m = \sqrt{(y^2 + (a + x)^2)}$, & le triangle rectangle $m b p$ donne aussi $m b = \sqrt{(y^2 + (b - x)^2)}$; donc par la nature du Problême $a : b :: \sqrt{(y^2 + (a + x)^2)} : \sqrt{(y^2 + (b - x)^2)}$; donc, en quarrant, $a^2 : b^2 :: y^2 + (a + x)^2 : y^2 + (b - x)^2$. Elevant les Binômes au quarré, & substituant la valeur de y^2 prise de l'équation au cercle, en se sou-

* On n'a décrit qu'une partie de la circonférence.

** Car les angles $g a c$, $f c b$ sont chacun de 60 degrés, parce que les triangles auxquels ils appartiennent sont équilatéraux; donc ces angles sont égaux.

venant que $r = \frac{ba}{a-b}$, on aura l'analogie $a^2 : b^2 :: a^2 + 2ax + x^2 : b^2 - 2bx + x^2 :: a^2 + \frac{2a^2x}{a-b} : b^2 + \frac{2abx}{a-b} - x^2 \quad + \frac{2abx}{a-b} - x^2 + \frac{2b^2x}{a-b}$; donc *alternando*, *invertendo*, *dividendo* & encore *invertendo*, $a^2 : \frac{2a^2x}{a-b} :: b^2 : \frac{2b^2x}{a-b}$, ou divisant les conséquents par 2, ôtant les fractions & divisant les termes de la premiere raison par a^2, & ceux de la seconde par b^2, $a-b : x :: a-b : x$. Cette proportion, étant nécessaire, fait voir que c'est un Théorême & non un Problême; c'est-à-dire, que tous les points de la circonférence cm ont cette propriété.

COROLLAIRE. Donc de tous les points m de la circonférence cm, on verra les lignes ac, cb sous le même angle : car si l'on conçoit que du point m on ait tiré une ligne mc qui partage l'angle amb en deux également, on aura (voyez la Géométrie) $am : bm :: ac : cb$; donc la ligne mc divise l'angle amb en deux également; donc, &c.

98. PROBLÊME. *Etant données trois droites ac, cb, bg situées sur la même ligne* (fig. 60), *on demande un point m, duquel ces trois droites soient vues sous le même angle.* Ayant joint les points p, f des triangles équilatéraux apc, cfb construits sur les deux premieres lignes, du point d, où la ligne pf rencontre ag, & d'un rayon $= dc$, décrivez le cercle cm. Du point k où la droite qui passe par les sommets des triangles équilatéraux décrits sur les deux lignes bg & cb, rencontre ga, décrivez le cercle bm avec le rayon kb. Par le Théorême précédent & son Corollaire, les lignes ac, cb seront vues sous le même angle de tous les points de l'arc cm; de même les lignes cb, bg seront vues sous le même angle de tous les points de l'arc bm; donc du point de concours m de ces deux arcs, les trois lignes doivent être vues sous le même angle. Il est évident qu'il doit y avoir un autre point en-dessous de ag qui a la même propriété. Si les cercles ne

ſe rencontrent pas, le Problême eſt impoſſible.

On peut quelquefois, ſans en venir à une équation entre x & y, trouver une ſolution fort ſimple d'un Problême qui paroît d'abord aſſez difficile, comme on va le faire voir dans le Problême ſuivant.

99. PROBLÊME. *Etant donné un cercle anbp* (fig. 61), *une corde ab, & deux points k & d ſitués ſur cette corde, trouver le point p ſitué ſur la circonférence, d'où tirant les deux lignes pkn, pdm & joignant les deux points m, n par la ligne nm, on ait la corde mn parallele à la corde ba.* Suppoſons la choſe faite, du point n je mene la tangente nB juſqu'à la rencontre de la corde ba prolongée en B. L'angle Bnp fait par une corde np & la tangente nB, eſt $= nmp$, angle appuyé ſur l'arc nBp; or à cauſe des paralleles les angles nmp, kdp ſont correſpondants & par conſéquent égaux. Cela poſé les triangles pdk, bnk qui ont les angles en k oppoſés au ſommet, & les angles en n & d égaux ſont ſemblables; donc Bk : pk :: nk : dk, & B$k \times dk = pk \times nk$. Mais lorſque deux cordes d'un cercle ſe coupent, les parties de l'une ſont réciproques aux parties de l'autre, ainſi que nous l'avons vû dans la Géométrie; donc $pk \times nk = ak \times bk$; donc B$k \times dk = ak \times bk$; ainſi $kd : ak :: bk :$ Bk. Prenant donc à volonté deux points k & d ſur la corde donnée ab, on cherchera une quatrieme proportionnelle aux trois lignes dk, ak, bk & l'on aura le point B, duquel on menera les tangentes Bn, NB & par le point n la corde nm, & le problême ſera réſolu; le point N peut donner une ſeconde ſolution.

De la conſtruction des équations du ſecond degré à deux inconnues.

100. De ce que nous avons dit ci-deſſus (12 & 16), il ſuit que toute équation du ſecond degré à deux inconnues *, exprime une Section

* Nous ne regardons pas comme équations du ſecond degré, celles qui ſont diviſibles en facteurs du premier degré, telle eſt l'équation $a^2x^2 + 2axyb + b^2y^2 = 0$, ou $(ax + by) \times (ax + by) = 0$, telle eſt encore l'équation $xy = 0$. Ces ſortes d'équations, qu'on peut réduire au premier degré par la diviſion, ne repréſentent qu'un aſſemblage de lignes droites.

Conique ou ne désigne aucune ligne possible. Les équations aux Sections Coniques sont

$y^2 = \pm ax$ . . . à la Parabole, les x sont positifs pour le signe +, & négatifs pour le signe −.

$x^2 = \pm ay$ . . . à la Parabole, les x étant pris sur la tangente.

$y^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (b^2 - x^2)$ . . à l'Ellipse, dont les demi-diametres sont b & c, & l'origine des x au centre.

$y^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (2bx - x^2)$. à l'Ellipse, en comptant les x du sommet du diametre.

$\left.\begin{array}{l} y^2 = b^2 - x^2 \\ y^2 = 2bx - x^2 \end{array}\right\}$ . . aux Diametres conjugués égaux de l'Ellipse, si l'angle des coordonnées est oblique, & au Cercle, si cet angle est droit.

$\left.\begin{array}{l} x^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (b^2 - y^2) \\ x^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (2by - y^2) \end{array}\right\}$. à l'Ellipse, les x étant pris sur la tangente qui passe par l'extrêmité du diametre $2b$.

$\left.\begin{array}{l} x^2 = b^2 - y^2 \\ x^2 = 2by - y^2 \end{array}\right\}$ . . au Cercle, ou aux Diametres conjugués égaux de l'Ellipse, selon que l'angle des coordonnées est droit ou oblique.

$\left.\begin{array}{l} y^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (x^2 - b^2) \\ y^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (2bx + x^2) \end{array}\right\}$ à l'Hyperbole rapportée au diametre $2b$.

$y^2 = \frac{b^2}{c^2} \cdot (x^2 + c^2)$ . . . à l'Hyperbole par rapport au second diametre $2c$. (Voy. Sections Coniques, Coroll. II, n° 52).

$x^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (y^2 - b^2)$
$x^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (2by + y^2)$ } . à l'Hyperbole les abscisses étant prises sur la tangente.

$y^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (x^2 - 2bx)$ l'origine des Abscisses étant supposée au sommet de l'Hyperbole opposée.

$x^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (y^2 - 2by)$ en prenant dans ce même cas les x sur la tangente.

$yx = c^2$ . . . . . à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes.

Nous allons exposer la méthode de rapporter les équations du second degré à quelqu'une des formules précédentes, ce qui souvent exige de compléter le premier membre de l'équation.

101. EXEMPLE I. *Etant donné l'angle des coordonnées, on propose de construire l'équation* $ax + ab = y^2$. A cause de $ax + ab = a \times (x + b)$, faites $x + b = z$; donc, en substituant, $az = y^2$, équation à la parabole. Sur le diametre am (fig. 62) avec le parametre $= a$, décrivez la parabole can, dont les coordonnées ap, pc fassent entr'elles l'angle donné, ap sera $= z$ & $cp = y$; mais $x = z - b$; donc prenant $ad = b$, les dp seront $= x = z - b$. Ainsi le point d sera l'origine des x qui seront positifs du côté de m, & négatifs du côté de a. Si l'équation avoit été $ax - ab = y^2$, on auroit fait $x - b = z$, & par conséquent

$x = z + b$; donc prenant $ag = b$, les x commenceroient en g.

102. EXEMPLE II. *On propose de construire l'équation* $xy + ax = a^2 - ay$. Faites d'abord $y + a = z$, ou $y = z - a$ pour avoir $zx = 2a^2 - az$, ou en transposant, $zx + az = 2a^2$. Faites ensuite $x + a = p$, vous aurez $zp = 2a^2 = c^2$, en faisant $2a : c :: c : a$; or l'équation $zp = c^2$ appartient à l'hyperbole rapportée aux asymptotes. Pour la construire tirez sous l'angle donné, ou sous un angle quelconque si cet angle n'est pas donné, les lignes Mm, Nn (fig. 63), prenez $ca = a$, $ab = 2a$, & entre les asymptotes Mm, Nn décrivez une hyperbole qui passe par le point b (ce qu'on peut faire par la méthode que nous avons enseignée dans les Sections Coniques), les cf seront $= p$, & les $fg = z$; mais $x = p - a = cf - ac$; donc les x commencent en a. A cause de $y = z - a$, divisez $ab = 2a$ en deux parties égales en d, & par ce point menez dh parallele à nn, & vous aurez $hg = z - a = y$. Puisque $dh = af$, l'on aura les $x = dh$, & les $y = gh$. Si $x = 0$, on aura $y = db = a$. Si x est positif & plus petit que a, les ordonnées sont positives. Si $x = a$, l'on aura $y = 0$: car $p = x + a = 2a$ dans ce cas; donc $z = \frac{2a^2}{p} = \frac{2a^2}{2a} = a$, mais $y = z - a = a - a = 0$, dans ce cas. Si $x > a$, les ordonnées sont négatives, & en supposant $x = \infty$, y est négatif & $= -a$. Si x est négatif & plus petit que a, les ordonnées sont positives. Si x négatif est $= -a$, l'ordonnée y est infinie.

Si l'équation étoit $xy + ax = ay - a^2$, en fai-

sant $y + a = z$, $x - a = p$, on auroit $pz = -2a^2$. C'est pourquoi prenant $ca = a$, on prendroit $ap = 2a$, du côté des ordonnées négatives, & les coordonnées seroient dh & hi.

Nous avons supposé jusqu'ici que les constantes permettent des substitutions convenables ; si elles étoient plus composées, il faudroit les ramener à des expressions plus simples. Soit l'équation $a^2 - bx = y^2$, faites premiérement $a^2 = bc$, vous aurez $b.(c - x) = y^2$, faites ensuite $c - x = z$, pour avoir $bz = y^2$, équation à la parabole. De même dans l'équation $a\frac{dd}{m} + bx = y^2$, faites $dd = bf$ pour avoir $\frac{b.(af)}{m} + bx = y^2$, cette équation se réduira à la précédente, en faisant $\frac{af}{m} + x = z$. Dans l'équation $\frac{a^2x - b^2x + n^3}{a + b} = y^2$, supposez $n^3 = (aa - bb).c$, pour avoir $(a - b).x + (a - b).c = y^2$, enfin supposez $x + c = z$ & $a - b = d$, pour avoir $dz = y^2$, équation à la parabole. Dans l'équation $xy + ax = dd - cy$, servons-nous de la substitution $y + a = z$, pour avoir, en transposant, $xz + cz = dd + ac$. Supposons ensuite $x + c = p$ & $d^2 = af$, il viendra $pz = a.f + ac = ab$, en faisant $f + c = b$; or l'équation $pz = ab$ appartient à l'hyperbole.

103. EXEMPLE III. *Soit l'équation* $x^2 + 2ax = y.(a + b)$, * complettez le premier membre

* Ou $x^2 + cx = y$, en représentant $2a$ par c & $a + b$ par 1.

pour avoir $x^2 + 2ax + a^2 = y.(a+b) + a^2$, faites $x + a = p$, vous aurez $p^2 = (a+b) \times \left(\frac{a^2}{a+b} + y\right)$. Faites encore $\frac{a^2}{a+b} + y = z$, & vous aurez l'équation à la parabole $p^2 = z.(a+b)$. Avec le parametre $a+b$ (fig. 64) décrivez la parabole ag, dont la tangente à l'origine du diametre qui passe par le point a soit af *; les af seront $= p$ & les $gf = z$. Mais $p - a = x$; donc coupant $ac = a$, les cf seront $= x$. De même puisque $y = z - \frac{a^2}{a+b}$, & que par la nature de la parabole, $dc = \frac{a^2}{a+b}$, en menant par le point d la ligne hd parallele à fa, on aura $dh = cf = x$, & $gh = y$.

104. EXEMPLE IV. *Supposons que l'équation contienne les quarrés des deux inconnues, comme l'équation* $x^2 + ax = 2y^2 - 2by$. Complettant le premier membre, & faisant ensuite $x + \frac{a}{2} = p$, on aura $p^2 = 2y^2 - 2by + \frac{a^2}{4}$, ou $p^2 - \frac{a^2}{4} = 2y^2 - 2by$, ou en divisant par 2, complettant le second membre, & faisant ensuite $y - \frac{b}{2} = z$, $\frac{p^2}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{4} = z^2$. Il peut arriver trois cas (fig. 65); dans le premier on supposera $a^2 = 2b^2$, dans ce cas l'équation devient $\frac{p^2}{2} = z^2$, $p^2 = 2z^2$, ou

* Si l'angle des coordonnées est droit, le point a sera l'origine de l'axe de la parabole.

$p = \pm z\sqrt{2}$; d'où l'on tire $p : z :: \sqrt{2} : 1 :: \sqrt{(2b^2)} : b :: a : b$ (à cause de $2b^2 = a^2$) $:: \frac{a}{2} : \frac{b}{2}$. Soit $ca = \frac{a}{2}$, tirez $ba = \frac{b}{2} = ad$, menez les lignes indéfinies cb, cd, l'on aura les $cf = p$, les $fg = z$. Mais $y = z + \frac{b}{2}$; donc menant par le point d la ligne hd parallele à fa, les hg seront y. De même $x = p - \frac{a}{2}$; donc les $dh = af$ seront x, & dans ce cas l'équation appartient aux lignes droites cg, cd. Si $a^2 > 2b^2$, supposons $a^2 - 2b^2 = m^2$, pour avoir $\frac{p^2}{2} - \frac{m^2}{8} = z^2$, ou $p^2 - \frac{m^2}{4} = 2z^2$; donc $p^2 - \frac{m^2}{4} : z^2 :: 2 : 1 :: \frac{m^2}{4} : \frac{m^2}{8}$. Cette proportion appartient à une hyperbole par rapport à deux diametres m, $\frac{m}{\sqrt{2}}$. Prenant les demi-diametres $cn = \frac{m}{2}$, $cm = \frac{m}{2\sqrt{2}}$ (fig. 66), décrivez sur cnf l'hyperbole ng, on aura les $cf = p$, & les $fg = z$. Coupez $ca = \frac{a}{2}$, vous aurez $af = p - \frac{a}{2} = x$. Menez ad parallele à cm & dh parallele à cf, faites $ad = \frac{b}{2}$ & vous aurez $hg = z + \frac{b}{2} = y$; donc les coordonnées de l'équation proposée seront $dh = af = x$, & $gh = y$.

Enfin si $a^2 < 2b^2$, faites $2b^2 - a^2 = m^2$ pour avoir $\frac{p^2}{2} + \frac{m^2}{8} = z^2$, ou $p^2 + \frac{m^2}{4} = 2z^2$; donc $p^2 + \frac{m^2}{4} : z^2 :: 2 : 1 :: \frac{m^2}{4} : \frac{m^2}{8}$. Faisant le second demi-diametre cm (ou le second demi-axe si l'angle des coordonnées est droit) $= \frac{m}{2}$, le premier demi-diametre $cn = \frac{m}{2\sqrt{2}}$, décrivez l'hyperbole ng (fig. 67), les cf seront $= p$, les $fg = z$; donc ayant pris $ca = \frac{a}{2}$, $ad = \frac{b}{2}$ & parallele à cn, menant dh parallele à cf, les af seront $= x$ & les $hg = y$; ainsi dans ce cas l'équation est à l'hyperbole rapportée à un second diametre *.

105. On peut voir par les Exemples précédents que tout se réduit à substituer une inconnue à la place d'une autre inconnue, jointe à une constante positive ou négative, & qu'on a souvent besoin de completter un membre de l'équation. Après avoir trouvé la Courbe que donnent les substitutions, il faut rétrograder pour déterminer les x & les y, c'est-à-dire, les coordonnées de l'équation proposée. Comme cette méthode est quelquefois compliquée pour les équations qui, contenant un des quarrés x^2, ou y^2, ou tous les deux, contiennent encore le rectangle xy, nous emploie-

* Sous le nom de diametre, nous comprenons les axes qui ne different des diametres qu'en ce que l'angle des coordonnées, par rapport à ces derniers, est oblique, tandis qu'il est droit par rapport aux premiers.

rons pour ces sortes d'équations la méthode des *indéterminées*, en nous servant d'un artifice qui rend la construction facile. Pour cela je dispose l'équation de telle maniere que tous les y se trouvent d'un côté, le terme où se trouve y^2 étant positif & sans coefficient; ajoutant ensuite de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient de y, le premier membre sera un quarré parfait, dont je fais la racine $= z$. Ayant fait la substitution, je trouve une équation qui ne contient pas le plan zx. Si je construis la Courbe des indéterminées z & x, & qu'en rappellant les substitutions je détermine y, les y ne se termineront pas à la ligne des x, mais à une ligne dont les abscisses seront aux abscisses x en raison donnée. C'est pourquoi je construis l'équation en prenant mx & non x pour les abscisses (m est une quantité qu'on déterminera dans la suite) & z pour les ordonnées. Cela posé, je tire par l'origine des mx une ligne qui fasse avec les mx, un angle tel qu'en ajoutant à z ou retranchant de z la quantité qu'indique le Calcul, je puisse déterminer y, en ajoutant ou retranchant, s'il le faut, une constante. Enfin, je déterminerai la valeur de m, aussi-bien que la grandeur des angles qui doivent avoir lieu, pour que les lignes x & y fassent entr'elles un angle donné.

106. EXEMPLE V. *Soit l'équation* $y^2 - 2ay + 2xy = a^2 + 4ax - x^2$. J'ajoute de chaque côté le quarré de $x - a$, moitié du coefficient de y, pour avoir $(y - a + x)^2 = 2a^2 + 2ax$. Je fais $y - a + x = z$, il vient $z^2 = (x + a).2a$, équation à la parabole. Mais on doit construire la Courbe de telle sorte que les abscisses soient mx & non x. C'est pourquoi, en conservant l'égalité, je dispose

dispose ainsi l'équation : $z^2 = \frac{2a}{m} \cdot (ma + mx)$.

Supposons qu'avec le parametre $\frac{2a}{m}$, on décrive sur le diametre af (fig. 68) la parabole ai, dont les abscisses soient $af = ma + mx$ & les ordonnées fhi (paralleles à la tangente ab) $= z$. Prenons $ac = ma$, nous aurons $cf = mx$. Pour trouver $y = z + a - x$; prolongez ba en d, en sorte que $ad = a$, menez dg parallele à fa, & prolongeant if jusqu'à la rencontre de gd, vous aurez $mg = cf = mx$, & $gi = z + a$. De $z + a$ retranchant x, il restera la valeur de y. Supposons qu'on ait mené la ligne mh, de maniere que l'interceptée $gh = x$, on aura $hi = gi - gh = z + a - x = y$. Afin que les y se terminent à la ligne des x, il est nécessaire que l'on ait $mh = x$. Il faut donc trouver une valeur de m telle que l'on ait $gh = mh = x$, l'angle mhg étant donné. Faisons le triangle rts dont l'angle s soit égal à l'angle donné des x & des y, c'est-à-dire $= mhg$, & dont les côtés sr, st soient égaux entr'eux. Je suppose chacun de ces derniers côtés $= a$, & je fais le troisieme côté $rt = c$. Cela posé, les triangles semblables srt, hmg donneront $a : c :: x : mx :: 1 : m$; donc $m = \frac{c}{a}$; donc le parametre $ab = \frac{2a}{m} = \frac{2a^2}{c}$ & la ligne $ca = dm = ma = c$. Puisque l'angle $mgh = t$, l'angle baf sera le supplément de l'angle t, parce que les angles g & afi sont égaux; or baf est supplément de $fad = afi$. C'est pourquoi sur le diametre af avec un parametre $ab = \frac{2a^2}{c}$,

& sous l'angle baf supplément de l'angle t, on décrira la parabole ai, on prendra $da = a$, menant dg parallele à fa, sur dg on coupera $dm = c$, tirant mh de telle sorte que l'angle gmh soit $= t = r$, on aura $mh = x$, $hi = y$. Si les x & les y doivent faire un angle droit, on aura $m = \sqrt{2}$.

107. EXEMPLE VI. *Soit l'équation convenablement ordonnée* $y^2 - xy = a^2 - x^2$. Complettant le premier membre, faisant ensuite $y - \frac{x}{2} = z$, il vient $z^2 = a^2 - x^2 + \frac{x^2}{4}$, ou $z^2 = a^2 - \frac{3}{4}x^2$, équation à l'Ellipse. Pour faire que les coordonnées soient mx & z, multipliant l'équation par m^2 & la divisant par $\frac{3}{4}$, je lui donne cette forme $\frac{4m^2z^2}{3} = \frac{4m^2a^2}{3} - m^2x^2$; d'où l'on tire $\frac{4m^2a^2}{3} - (mx)^2 : z^2 :: \frac{4m^2a^2}{3} : a^2$. Sur les demi-diametres $ca = \frac{2ma}{\sqrt{3}}$ & $cb = a$, soit supposée décrite l'Ellipse aib (fig. 69), on aura les $cf = mx$ & les $fi = z$, on suppose fi parallele à cb. Mais parce que $y = z + \frac{x}{2}$, on menera ch de maniere que $hf = \frac{x}{2}$, & l'on aura $hi = y$; or pour que y soit terminé à la ligne des x, il est nécessaire que $ch = x$. Puisque ch doit être double de fh, & que l'angle chi des coordonnées est donné *, je construis un triangle rst, dont l'angle s soit égal à l'angle

* Si cet angle n'étoit pas donné, on le prendroit à volonté, & pour plus de facilité on pourroit le faire droit. Si $\frac{2ma}{\sqrt{3}} = a$, ou si $2m$ est $= \sqrt{3}$ & l'angle bca de 90^0, on aura un cercle.

donné, & dont le côté rs soit double de st. Soit $rs = a$, $st = \frac{a}{2}$ & joignant r & t, je suppose $rt = c$.

Nous aurons donc $a : c :: 1 : m = \frac{c}{a}$; ainsi le demi-diametre $ca = \frac{2c}{\sqrt{3}}$. L'angle cfh est $= bca$ (à cause des paralleles bc, ih) $= t$; c'est pourquoi avec les demi-diametres cb, ac faisant ensemble l'angle $bca = t$, on décrira l'Ellipse ba. Enfin menant ch telle que l'angle hcf soit $= r$, les ch seront $= x$ & les $hi = y$. Si l'angle $s = ihc$ est de $90°$, on aura $m = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

108. EXEMPLE VII. *Soit l'équation* $2ay - 3ax + 4x^2 = -2y^2 + 6xy$. Faisant passer tous les termes affectés de y dans le premier membre, & tous les autres dans le second & divisant par 2, j'ai l'équation convenablement ordonnée $y^2 - 3xy + ay = \frac{3ax}{2} - 2x^2$. Complettant le premier membre, & faisant ensuite $y - \frac{3x}{2} + \frac{a}{2} = z$, il vient $z^2 = \frac{x^2 + a^2}{4}$, ou $4z^2 = x^2 + a^2$. Je cherche le lieu des co-ordonnées z & mx. En multipliant l'équation par m^2, j'ai $4m^2 z^2 = m^2x^2 + m^2 a^2$, d'où je tire aisément $(mx)^2 + (ma)^2 : z^2 :: (ma)^2 : \frac{a^2}{4}$. Je décris l'hyperbole Bi (fig. 70), dont le second demi-diametre soit $ca = ma$, & le premier $cB = \frac{a}{2}$; les cf seront $= mx$ & les $fi = z$.

Je mene BK parallele à cf, pour avoir $ik = z - \frac{a}{2}$.

A cette quantité j'ajoute $\frac{1}{2}x$ pour avoir y. C'est pourquoi je mene B h, de maniere que $hk = \frac{1}{2}x$, afin d'avoir $hi = z - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}x = y$. Pour que sous l'angle donné Bhi, l'on ait B$h = x$ & $kh = \frac{1}{2}x$, supposant l'angle $s =$ Bhi, je fais $rs = a$, $st = \frac{3a}{2}$, je tire rt que je suppose $= c$, & supposant de plus, $m \cdot a = c$, j'ai $a : c :: 1 : m = \frac{c}{a}$; donc le demi-diametre $ca = ma = c$, cB étant toujours $= \frac{a}{2}$. Disposons ces demi-diametres sous l'angle B$ca = t$, décrivons l'hyperbole Bi, tirons la tangente Bk nécessairement parallele à cf & menons Bh faisant avec Bk l'angle hB$k = r$, on aura les B$h = x$, les $hi = y$. Si l'angle s étoit droit, on auroit $c^2 = a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$, $c = \frac{a}{2}\sqrt{(13)}$, & $m = \frac{\sqrt{(13)}}{2}$.

109. Appliquons maintenant la méthode aux équations qui ne contiennent pas y^2. Dans ce cas il faut disposer le plan xy de maniere qu'il soit positif, sans coefficient & placé du même côté que x^2, comme on le voit dans l'équation $xy - \frac{x^2}{2} = ax - ay + a^2$. Supposez le multiplicateur $y - \frac{a}{2}$ (de x) $= z$, ou $y = z + \frac{a}{2}$, & substituezla valeur de y dans l'équation donnée pour avoir $xz = \frac{ax}{2} - az + a^2$, ou $zx - \frac{ax}{2} = a^2 - az$. Faites

$z - \frac{a}{2} = u$, vous aurez $xu = \frac{a^2}{2} - au$, ou $xu + au = \frac{a^2}{2}$. Si on rapporte la Courbe aux abſciſſes x, on ne trouvera pas que les u ſoient terminés à la ligne des x. C'eſt pourquoi multipliant l'équation par m pour avoir $u(mx + ma) = \frac{ma^2}{2}$, je fais $mx + ma = p$, il en réſulte $pu = \frac{ma^2}{2}$, équation à l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes. Sur une des aſymptotes (fig. 71) prenez $ca = ma$, menez $aB = \frac{a}{2}$ & parallelement à l'autre aſymptote cm, décrivez une hyperbole qui paſſe par le point B, & vous aurez les $cf = p$, les $fi = u$. Mais $mx = p - ma$; donc $af = mx$. De plus, parce que $z = u + \frac{a}{2}$, faiſant $ad = \frac{a}{2}$, & par le point d tirant dn parallelement à cf, on aura les $dg = af = mx$ & les $gi = z$. Mais $y = z + \frac{x}{2}$; je mene donc dh de maniere que hg ſoit $= \frac{1}{2}x$, & alors hi ſera $= y$. Pour que y ſe termine à la ligne des x, il faut que $dh = x$. Déterminons à préſent quelle doit être pour cela la valeur de m. Parce que l'angle dhi des coordonnées eſt ſuppoſé donné, & que $dh : gh :: x : \frac{x}{2} :: 2 : 1$, je conſtruis un triangle rst, dans lequel l'angle s ſoit égal à l'angle donné, je prends $rs = a$, $st = \frac{a}{2}$ & je ſuppoſe $rt = c = ma$; donc $m = \frac{c}{a}$.

C'eſt pourquoi entre les aſymptotes cm, ca faiſant entr'elles l'angle $mca = r$, ayant pris $ca = ma = x$, $aB = \frac{a}{2}$, je décris une hyperbole iB, qui paſſe par le point B. Ayant fait $ad = aB$, je mene ud parallele à ca, enfin je tire dh de maniere que l'angle hdg ſoit $= r$, les dh ſeront $= x$, & les hi paralleles à cm ſeront $= y$. Si l'angle r eſt droit, on aura $c^2 = \frac{5a^2}{4}$ & $c = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.

REMARQUE. Si le plan xy ſe trouve dans l'équation avec le quarré y^2 ſans que xx s'y trouve, changeant y en x & réciproquement, on aura une équation qui ſera dans le cas de celle que nous venons de conſtruire. Pour connoître ſi une équation indéterminée du ſecond degré appartient à une Section Conique plutôt qu'à l'autre, reliſez ce que nous avons dit (12 & 16).

Nous allons maintenant réſoudre quelques Problêmes indéterminés du ſecond degré.

110. PROBLEME. *Soit am (fig. 72) la tangente d'un cercle dont le centre eſt c, ſuppoſant toujours qm parallele au diametre ab & égale à l'interceptée rm, on demande les lieux de tous les points q.* Tirant qP perpendiculairement ſur le diametre ba prolongé & faiſant $Pq = am = y$, $aP = qm = rm = x$, $ca = a$. Par la proprieté du cercle, $(am)^2 = mr \times mM$ (car la tangente eſt moyenne proportionnelle entre la ſecante & ſa partie hors du cercle, voyez la Géométrie) ou $y^2 = x.(x + 2a)$ ou $y^2 = 2ax + x^2$, équation à une hyperbole équilatere dont les axes ſont égaux au diametre donné. Il eſt viſible que les interceptées rm du quart de cercle ad donnent la branche aq, & les interceptées pt la branche af.

Il n'eſt pas non plus difficile de voir que par le moyen de la tangente N$b k$, on formeroit l'hyperbole oppoſée $n b h$.

111. PROBLÊME. *Etant donné un point n (fig. 73) entre les côtés d'un angle a b c, trouver une Courbe n m qui ſoit telle qu'en menant par n une ligne quelconque a m c, les interceptées a m, n c ſoient toujours égales.* Par les points m & n tirez $m s$ & $n d$ paralleles au côté $b c$ & ſuppoſez $b s = x$, $m s = y$, $n d = a$. Puiſque par la nature du Problême, $a m = n c$, on aura $a s = b d = b$ *; donc $a d = b s = x$. Or à cauſe des paralleles $s m$, $n d$ l'on a $s a : s m :: a d : d n$, ou $b : y :: x : a$; donc $x y = b a = c^2$, en faiſant $b a = c^2$; or $x y = c^2$ eſt une équation à l'hyperbole par rapport aux aſymptotes $b a$, $b c$. Décrivant donc entre ces lignes une hyperbole qui paſſe par le point n, on aura la Courbe cherchée.

112. PROBLÊME. *Conſtruire un quarré égal à un rectangle dont les côtés différent d'une ligne donnée 2 a.* Soit y le côté du quarré, x le petit côté du rectangle; donc le grand ſera $= x + 2 a$. Mais par la nature du Problême l'on a $y^2 = 2 a x + x^2$, équation à l'hyperbole équilatere, dont les axes ſont égaux à la ligne $2 a$. Ainſi quelque part qu'on prenne l'ordonnée y, ſon quarré ſera toujours égal à un rectangle, dont les côtés différeront de la ligne donnée $2 a$.

113. PROBLÊME. *Conſtruire un quarré égal à un rectangle, dont la ſomme des côtés contigus eſt conſtante & = 2 a.* Soit y le côté du quarré

* Car à cauſe des paralleles $n d$, $m s$; l'on a $m a : c n :: s a : d b$. Mais $m a = c n$; donc $s a = b d$.

demandé, x un des côtés du rectangle, le côté contigu sera $= 2a - x$; mais par la nature du Problême $y^2 = 2ax - x^2$, équation à un cercle dont le diametre $= 2a$; donc le quarré de chaque ordonnée & le rectangle des abscisses correspondantes auront la propriété demandée.

114. PROBLÊME. *Deux lignes paralleles ah, bg dont les extrêmités a & b sont fixes* (fig. 74) *étant données de position, on demande de trouver entre ces deux lignes un point m par où & par le point a ayant mené la ligne amd & la ligne pmq parallele à ba, bd soit à mp comme une ligne donnée f est à ba.* Supposant la chose faite, soit $ab = a$, $ap = x$, $pm = y$. Les triangles semblables abd, mpa donnent $mp : pa :: ab : bd$, ou $y : x :: a : bd = \frac{xa}{y}$; mais par la nature du Problême, $\frac{xa}{y} : y :: f : a$; donc $fy = \frac{a^2x}{y}$, ou $fy^2 = a^2x$, ou $y^2 = \frac{a^2}{f}x$, ou $y^2 = px$ en faisant $\frac{a^2}{f} = p$. Cette équation appartient à une parabole, dont ah est la ligne de x.

REMARQUE. Il y a des Problêmes qui paroissent d'abord assez difficiles & dont la solution néanmoins est très-facile, en faisant attention à quelque propriété des Courbes. Qu'on demande, par exemple, la nature de la Courbe ALDB (fig. 74 A), telle qu'ayant décrit autour de l'axe AB une infinité de paraboles LA, FA, DA, &c. (de maniere cependant que le plus grand parametre soit $<$ 2. AB), & d'un point B pris sur l'axe AB, ayant mené les lignes BL, BF, &c. perpendiculaires sur ces paraboles, la Courbe AFGB passe par tous les points où ces perpendiculaires rencontrent leurs paraboles. Des points L, F, D, ayant mené les lignes LR, FQ, DP, &c. perpendiculaires à

l'axe A B, je remarque que Bp est la sous-normale de la parabole G A, B P la sous-normale de la parabole D A, &c. Soit maintenant D P $= y$, A P $= x$, A B $= 2b$; donc B P $= 2b - x$. Par la nature de la parabole D A, en faisant son parametre $= 2p$, on a $y^2 = 2p.x$. Mais la sous-normale B P est la moitié du parametre; donc B P $= p = 2b - x$ & $y^2 = 2.(2bx - xx)$. On trouvera de même que pour la parabole G A, en faisant B$p = 2b - x$, A$p = x$, G$p = y$, on trouvera, dis-je, $y^2 = 2.(2bx - xx)$, & ainsi de même pour toutes les autres paraboles. Donc dans la Courbe A L B les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les doubles produits des abscisses x & $2b - x$; c'est-à-dire, qu'on a toujours $y^2 : 2bx - xx :: 2 : 1 :: aa : bb$ (en supposant $aa = 2bb$); donc $y^2 : 2bx - xx :: aa : bb$, & $y^2 = \frac{aa}{bb}(2bx - xx)$, équation à l'Ellipse. Ainsi la Courbe A D B est une demi-Ellipse, dont l'axe A B $= 2b$, & dont le demi-axe F Q $= a$. Pour trouver F Q, on prendra le produit de deux abscisses quelconques (A P, B P, par exemple) & l'on fera A P. B P $= 2bx - xx : (DP)^2 = y^2 :: bb : aa$; le quatrieme terme de cette proportion fera connoître le demi-axe $a =$ F Q.

De la Résolution Géométrique des Equations déterminées du troisieme & du quatrieme dégré.

115. Si on résout une équation déterminée du troisieme & du quatrieme degré en deux équations indéterminées du second degré, les intersections des Courbes représentées par ces équations indéterminées, donneront les racines de l'équation proposée.

Pour le faire concevoir plus clairement, soient les équations $x^2 = ay$, $xy = ab$, nous aurons deux équations & deux inconnues; ainsi nous pourrons parvenir à une équation à une seule in-

connue. En effet la premiere équation donne $\frac{x^2}{a}$ $= y$, cette valeur de y substituée dans la seconde, donne l'équation déterminée du troisieme degré $\frac{x^3}{a} = ab$, ou $x^3 = ba^2$. Réciproquement je puis résoudre cette derniere équation en deux autres équations indéterminées du second degré, en supposant $x^2 = ay$, & $xy = ab$, de la combinaison desquelles résulte l'équation $x^3 = a^2 b$.

Ayant résolu l'équation du troisieme ou quatrieme degré en deux équations indéterminées du second degré, prenant la ligne ap (fig. 75) pour l'axe & le point a pour l'origine des x de l'une & de l'autre Section Conique donnée par ces équations indéterminées; on décrira ces Courbes, & les racines de l'équation proposée seront déterminées par les points d'intersection de ces Courbes. Dans l'exemple proposé sur la tangente ap, décrivez la parabole am, qui sera le lieu de l'équation $x^2 = ay$. Menant ensuite an parallele aux ordonnées pm, décrivez l'hyperbole de l'équation $xy = ab$, entre les asymptotes ap & na, le point m d'intersection des deux Courbes am, Mm déterminera l'ordonnée mp, & l'abscisse ap déterminera la seule racine réelle de l'équation $x^3 = a^2 b$: car les autres racines sont imaginaires; aussi les Courbes am, Mm ne se coupent qu'en un point.

Il ne s'agit donc que de résoudre l'équation déterminée du troisieme & du quatrieme degré en deux indéterminées du second, telles que de ces équations on puisse réproduire l'équation proposée; mais pour plus de facilité, on peut supposer les équations du troisieme & du quatrieme degré dé-

livrées du second terme. Seulement il faudra avoir attention d'ajouter aux racines trouvées, le tiers du coefficient du second terme qu'on aura fait disparoître; mais on ajoutera le quart de ce coefficient, s'il s'agit des équations du quatrieme degré, en prenant ce tiers ou ce quart avec un signe contraire *.

116. *Soit l'équation générale du troisieme degré délivrée du second terme* $x^3 + abx - af^2 = 0$, *dans laquelle a & b peuvent être positifs ou négatifs.* Faisons $x^2 = ay$ & substituons la valeur de x^2 dans l'équation proposée, pour avoir, en divisant par a, $yx + bx - f^2 = 0$. L'équation $x^2 = ay$ appartient à la parabole. Pour construire l'autre équation, faisons $y + b = z$ & nous aurons, en transposant, $xz = f^2$, équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. Avec un parametre $= a$ (fig. 76), sur dm prise pour axe des x, dont l'origine est en d, on décrira la parabole pdn, qui aura dm pour tangente à l'origine d de l'axe ds des y. Par la propriété de la parabole, $(dm)^2 = (sn)^2 = x^2 = a \times ds = ay$; donc dn est la parabole cherchée. Pour construire l'hyperbole de l'équation $zx = f^2$; comme ces deux Courbes doivent avoir le même axe & la même origine des x, je prends $cd = b$, & par le point b je tire icq parallele à dm; il est visible que l'angle qcs des asymptotes sera égal à l'angle mds des x & des y, ce qui doit toujours être en pareil cas. Cela posé je cherche un point quelconque de l'hyperbole Mn, en faisant $f : cq :: qn : f$; donc $qn = \frac{f^2}{qc}$; or qc est une

* Il n'est pas difficile de voir que dans ce cas le tiers du coefficient du second terme, est une ligne & non un nombre.

quantité qu'on peut facilement connoître : ainsi qn sera connue ; donc on trouvera aisément un point n de l'hyperbole ; on trouvera de même les autres points en faisant varier cq. Nous avons donc $qn = z = y + b$ & $y = z - b = qn - mq$; donc $mn = y$ & $dm = cq = x$. Il n'est pas difficile de voir que le point d'intersection n déterminera une des racines dm de l'équation proposée. Si a & b sont positifs, la parabole & l'hyperbole ne se couperont qu'en un point, & l'équation n'aura qu'une seule racine réelle, la même chose arrivera si $b = o$.

117. *Soit maintenant l'équation générale du quatrieme degré* $x^4 + fgx^2 + f^2.bx \pm f^3 c = o$. Je suppose $f^3 c = x^2 y^2$; faisant la substitution, il vient $x^4 + fgx^2 + f^2 bx \pm x^2 y^2 = o$. Ecrivez ainsi le troisieme terme $\frac{f^2 b}{f\sqrt{(fc)}} \cdot f\sqrt{(fc)}\,x$. Substituez dans ce terme xy à la place de $f\sqrt{(fc)}$ (car de l'équation $f^3 c = x^2 y^2$ l'on tire $xy = f\sqrt{(fc)}$) pour avoir l'équation $x^4 + fgx^2 + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}} x^2 y \pm x^2 y^2 = o$, ou en divisant par x^2, $x^2 + fg + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}} y \pm y^2 = o$. Cette équation est à l'Ellipse si l'on prend le signe + dans le dernier terme, & au cercle si dans ce cas l'angle des coordonnées est droit. Si on prend le signe − l'équation est à l'hyperbole équilatere. Dans le premier cas joignez l'Ellipse ou le cercle & l'hyperbole équilatere dans le second cas avec l'hyperbole de l'équation $f\sqrt{(fc)} = xy$, les intersections de ces Courbes détermineront les racines cherchées. Si l'angle des coordonnées est supposé droit dans le cas du signe −,

on aura les racines par les intersections des deux hyperboles équilateres. Il est facile de voir qu'on peut, en multipliant l'équation du troisieme degré par $x = o$, ou par $x - o = o$, la rendre du quatrieme degré & trouver facilement ses racines.

On peut aussi construire l'équation générale du troisieme & du quatrieme degré par le moyen de la parabole & du cercle. Pour le faire voir, soit (fig. 76 A) une parabole DEF, dans laquelle on ait l'équation $y = bx + x^2$, B étant l'origine des abscisses qui se prennent sur la ligne MN, & l'angle des coordonnées étant droit (Voyez la Note du n° 103). sur l'indéfinie BA, on prend $BG = d$ (ou $= - d$ si cette ligne doit être prise dans le prolongement Ba), sur GH parallele à MN on prendra $GK = f$, quantité à laquelle on donneroit le signe $-$, si on la prenoit vers la gauche. Du point K, avec un rayon $KF = c$, je décris un cercle FA qui coupe la parabole en F. Maintenant puisque $FI = y$ & $BI = x$, en rapportant ces lignes à la parabole, on aura $FH = y - HI = x^2 + bx - d$, & $KH = LI = GH - GK = x - f$. Mais le triangle rectangle KHF donne

$$c^2 = x^4 + 2bx^3 \begin{array}{l} + b^2x^2 \\ + x^2 \end{array} \begin{array}{l} - 2dx^2 - 2bdx + d^2, \\ - 2fx + f^2 \end{array}$$

$$\text{ou } x^4 + 2bx^3 \begin{array}{l} + b^2x^2 \\ - 2dx^2 \\ + x^2 \end{array} \begin{array}{l} - 2bdx + d^2 \\ - 2fx + f^2 \\ \qquad\quad - c^2 \end{array} = o \ (A).$$

Prenant maintenant une équation quelconque du quatrieme degré, qui sera toujours renfermée dans la générale $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = o$ (B), les BI qu'on doit trouver seront les x, ou les valeurs des racines de cette équation. Comparant donc

l'équation B avec l'équation A, & les supposant égales, nous aurons $2b = p$; $bb - 2d + 1 = q$; $-2bd - 2f = r$; $dd + ff - cc = s$. Or les lignes désignées par les lettres b, d, f, c peuvent toujours être prises de la longueur nécessaire, pour que ces équations soient vraies, puisque ces équations servent à les déterminer. La premiere donne $b = \frac{1}{2}p$; la seconde donne $d = \frac{b^2 + 1 - q}{2}$ $= \frac{\frac{1}{4}p^2 + 1 - q}{2}$; par la troisieme, $f = \frac{-2bd + r}{2}$ $= \frac{-\frac{1}{4}p^3 + p - pq + 2r}{4}$, & par la derniere enfin, $c = \sqrt{(dd + ff - s)}$. Il est visible, par l'inspection de ces équations, que b, d, f ne peuvent jamais être imaginaires. A l'égard de c, cela ne peut arriver qu'autant que s seroit une quantité positive plus grande que $dd + ff$. Mais parce que d se détermine non-seulement par p & q, mais aussi par l'unité de ligne, unité que l'on peut prendre aussi grande qu'on veut, on pourra toujours rendre $dd + ff$ plus grand que s & supposer toujours c possible.

Si le cercle coupe la parabole en quatre points, la proposée aura quatre racines réelles ; elle en aura seulement deux, s'il n'y a que deux points de section : mais toutes ses racines seront imaginaires, si le cercle ne rencontre pas la parabole. D'autre côté, parce que les racines imaginaires d'une équation sont toujours en nombre pair, le cercle coupera la parabole en deux ou en quatre points, ou ne la coupera pas du tout. Si le cercle ne faisoit que toucher la parabole, chaque point d'attouchement indiqueroit deux racines égales qui se confondroient en une seule ; de sorte que deux points

d'attouchement indiqueroient quatre racines qui seroient égales deux à deux.

Soit maintenant l'équation cubique $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, qui étant multipliée par x devient $x^4 + px^3 + qx^2 + rx = 0$ (A). Equation du quatrieme degré, qui, étant comparée avec la générale du même degré, donne $s = 0$; de sorte que dans ce cas $c = \sqrt{(dd + ff - s)}$, est $= \sqrt{(dd + ff)}$; ce qui indique que dans ce cas l'une des racines de l'équation A est $= 0$, & que le cercle décrit du centre K avec le rayon c passe par le point B, origine des abscisses. Les autres racines de l'équation A (les mêmes que celles de la proposée) se trouveront facilement; car puisque une équation du troisieme degré doit avoir une racine réelle & deux imaginaires, ou bien trois racines réelles, le cercle coupera la parabole en un ou trois points, ou bien la coupera en un & la touchera en un autre point.

Nous donnerons dans la suite une méthode générale pour construire une équation d'un degré quelconque, par le moyen d'une seule Courbe & d'une ligne droite.

Solution de quelques Problêmes géométriques déterminés & indeterminés des degrés supérieurs.

118. PROBLÊME. *Trouver deux moyennes proportionnelles x & y entre deux lignes données a & b.* Il est évident que la premiere moyenne proportionnelle donnera la seconde, c'est pourquoi nous allons chercher la premiere. Par la nature du Problême $a : x :: x : y :: y : b$; donc par la nature des progressions $a^3 : x^3 :: a : b$ & $x^3 = a^2 b$, équa-

tion du troisieme degré, que nous avons déja construite (115) par le moyen d'une parabole & d'une hyperbole rapportées à ses asymptotes ; de sorte que l'abscisse ap (fig. 75) est la racine cherchée de notre équation. Supposons $ap = c$, nous aurons par la nature du Problême $a : c :: c : y = \frac{c^2}{a}$, seconde moyenne proportionnelle cherchée.

COROLLAIRE. Puisque par la propriété des progressions $a^3 : x^3 :: a : b$, il est évident que le cube fait sur la ligne a, est au cube fait sur la ligne x, comme $a : b$; donc si $a : b :: 2 : 1$, le cube fait sur le côté a sera double du cube fait sur la ligne x. Si $a = 3b$, le premier cube sera triple du second. On peut donc résoudre le fameux Problême de *la duplication du cube*, en cherchant la premiere des deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

119. PROBLÊME. *Un angle droit abh (fig. 77) & un point fixe a sur un de ses côtés, étant donnés de position sur un plan, si l'on mene du point a jusqu'à la rencontre du côté bh, une ligne quelconque bg & qu'on prenne toujours $mg = bg$, quelle est la Courbe à laquelle appartiennent tous les points m?* Supposant le Problême résolu, du point m j'abaisse la perpendiculaire mp sur le côté ab, & faisant $ab = a$, $ap = x$, $pm = y$; pb sera $= a - x$ & am sera $= \sqrt{(x^2 + y^2)}$; or les triangles apm, abg donnent $x : y :: a : bg = \frac{ay}{x} = gm$, par supposition. Mais à cause des paralleles pm & bg, l'on aura $ap : pb :: am : gm$, ou $x : a - x :: \sqrt{(x^2 + y^2)} : gm = gb = \frac{ay}{x}$; d'où l'on tire $ay = (a - x).\sqrt{(x^2 + y^2)}$, ou $a^2y^2 = (a - x)^2.(x^2 + y^2)$, ou $y^2 = \frac{(x - a)^2.\ x^2}{2ax - x^2} =$

$\frac{(a-x)^2 . x}{2a-x}$, ou $y = \pm \frac{ax - x^2}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Cette expression fait voir qu'à chaque abscisse il répond deux ordonnées égales, l'une positive, l'autre négative. Si l'on suppose $x < 2a$, les ordonnées seront réelles; donc la Courbe passe au-delà de b, & ses deux branches s'étendent l'une vers n, l'autre vers N. En prenant $gn = gb$, les triangles abg, aqn donnent $x : y :: a : bg = \frac{ay}{x} = gn$. Mais à cause des paralleles bg & qn, l'on a $aq : bq :: an : gn$, ou $x : x - a :: \sqrt{(x^2 + y^2)} : \frac{ay}{x}$, d'où il est aisé de tirer $y = \pm \frac{x^2 - ax}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, qui est l'équation pour les branches bn, bN. Du point b comme centre, avec un rayon $= a$, décrivez un cercle dont ad soit un diametre, menez la tangente indéfinie fdF, cette ligne sera l'asymptote de la Courbe. En effet, supposant $x = 2a$, on a $y = \pm \frac{2a^2}{0} = \pm \infty$. Si l'on suppose $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$, on aura en substituant cette valeur dans l'équation que nous venons de trouver & ôtant la fraction, on aura, dis-je, $2ax - x^2 = x^2 - ax$, ou $2a - x = x - a$, ou $3a = 2x$, & $x = \frac{3a}{2}$. Mais la Courbe rencontre le cercle lorsque son ordonnée devient égale à celle du cercle; ainsi la Courbe rencontre le cercle aux points correspondants à l'abscisse $at = \frac{3a}{2}$.

120. PROBLÊME. *Diviser un arc de cercle $mpqn$* (fig. 78) *en trois parties égales.* Supposant la chose faite, des points de division p & q j'abaisse les perpendiculaires ps, qt sur la corde mn. Divisant mn en deux également en d, il est visible que $sd = dt$, & à cause de $mp = pq = qn$, pq est parallele à mn. Cela posé, faisons la constante $md = a$, $ds = x$, $sp = y$, on aura $st = 2x = pq = mp$. Mais le triangle rectangle msp donne $4x^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, transposant, réduisant, divisant par 3 &

complettant, il vient $\left(x+\frac{a}{3}\right)^2=\frac{4a^2}{9}+\frac{y^2}{3}$. Faisant $x+\frac{a}{3}=z$, on a $z^2=\frac{4a^2}{9}+\frac{y^2}{3}$, ou $z^2-\frac{4a^2}{9}=\frac{y^2}{3}$, ce qui donne $z^2-\frac{4a^2}{9}:y^2::1:3::\frac{4a^2}{9}:\frac{4a^2}{3}$. Cette analogie appartient à une hyperbole, dont le premier demi-axe $=\frac{2a}{3}$ & le second $=\frac{2a}{\sqrt{3}}$: l'angle des coordonnées est ici droit. Pour décrire cette hyperbole, divisez mn en trois parties égales, mr, ra, an; & prenant le point a pour le centre, ar pour le premier demi-axe, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ pour le second demi-axe, décrivez l'hyperbole $prMP$, son intersection p avec le cercle donnera l'arc mp, qui sera le tiers de l'arc mpn. Par le point p, tirez pq parallelement à mn, le point q d'intersection déterminera le second tiers pq, & enfin nq sera le troisieme tiers de l'arc proposé. L'hyperbole coupe le cercle non-seulement en p, mais encore en un autre point P. Le point P indique le tiers de l'arc mPn, supplément à 360 degrés de l'arc proposé. En effet, si l'on avoit voulu couper cet arc en trois parties égales, on s'y seroit pris de même, & faisant $df=x$, $Pf=y$, on auroit trouvé la même équation que ci-dessus. On peut voir par-là comment on peut partager un angle en trois parties égales. Il suffit pour cela de couper l'arc de cercle, qui est sa mesure, en trois également; ce qui est maintenant facile.

121. PROBLÊME. *Etant donné un quart de cercle amb (fig. 79), menons un rayon quelconque cm qui détermine l'arc bm, dont le cosinus $=cd$ & le sinus $=md$, prenons l'arc bf tel que $bf:bm::1:m$. Coupant ensuite cg, qu'on suppose donnée par une fonction de cd ou de md, on demande la Courbe qui doit passer par tous les points g.* Des points g & f abaissons les lignes gh & fk perpendiculairement sur le rayon $cb=a$, faisons $ch=x$, $gh=y$; donc $cg=\sqrt{(x^2+y^2)}=z$. Faisons

encore l'arc $fb = p$, & par conséquent l'arc $bm = m.p$. Nous savons que cos. $mp =$

$$\frac{(\text{cos. } p + \sqrt{(-1)}.\text{ sin } p)^m + (\text{cos. } p - \sqrt{(-1)}.\text{ sin. } p)^m}{2\, a^{m-1}}.$$

(Voyez la Géométrie). Or les triangles cfk, cgh donnent $cg : cf :: ck : ck$, ou $z : a :: x :$ cos. $p = \frac{ax}{z}$. Les mêmes triangles donnent $z : a :: y :$ sin. $p = \frac{ay}{z}$; donc en substituant, cos. $mp = \frac{a^m}{z^m} \cdot \frac{(x + y\sqrt{-1})^m + (x - y\sqrt{-1})^m}{2\, a^{m-1}}$;

donc faisant cos. $mp = q$, multipliant ensuite par $\frac{z^m}{a^m}$, & effaçant a^{m-1}, diviseur commun des deux membres, l'on a $\frac{qz^m}{a} = \frac{(x + y\sqrt{-1})^m + (x - y\sqrt{-1})^m}{2}$. Si m est un nombre entier (fini), en élevant les binomes à la puissance m, les imaginaires disparoîtront, & substituant à la place de q sa valeur donnée en z, & à la place de z sa valeur $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, on aura facilement l'équation (finie) cherchée. Si $m = 2$, l'équation deviendra $\frac{qz^2}{a} = x^2 - y^2$. Si dans cette même supposition nous faisons $q = \frac{z^2}{a}$, il en résultera $\frac{z^4}{a^2} = x^2 - y^2$, ou $z^2 = a\sqrt{(x^2 - y^2)}$, ou (en substituant la valeur de z^2) $x^2 + y^2 = a\sqrt{(x^2 - y^2)}$, ou $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2x^2 - a^2y^2$. La Courbe de cette équation du quatrieme degré, est appellée *Lemniscate* (fig. 80), elle est composée de quatre branches amc, apc, bMc & bPc, égales & semblables, renfermées dans le cercle, dont le rayon $= a$, se coupant au centre du cercle sous un angle demi-droit : chacune de ces branches est produite par le quart de cercle correspondant.

En se servant de la formule du sinus, & faisant $dm =$ sin. $mp = t$ (fig. 79), on auroit trouvé, en supposant $m = 2$ & $t = \frac{z^2}{a}$, on auroit, dis-je, trouvé $\frac{z^4}{a^2} = 2xy$, ou

$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, équation qui repréſente une ligne du quatrieme ordre.

122. PROBLÊME. *Parmi un nombre m de moyennes proportionnelles entre a & b, trouver celle du rang n : ſuppoſant, par exemple, $m = 10$ & $n = 7$, trouver la ſeptieme de dix moyennes proportionnelles entre a & b.* Soit x la premiere des moyennes proportionnelles, on aura la ſérie ſuivante $\div a : x : \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2} \ldots \frac{x^n}{a^{n-1}} \ldots \frac{x^m}{a^{m-1}} : \frac{x^{m+1}}{a^m} = b$. Il eſt aiſé de voir que les expoſants de x déſignent les rangs des moyennes proportionnelles cherchées ; ainſi celle du rang n eſt $= \frac{x^n}{a^{n-1}}$. Suppoſons cette quantité $= z$, nous aurons $x^n = a^{n-1}z$; or à cauſe de $\frac{x^{m+1}}{a^m} = b$, $x^{m+1} = a^m b$, ou en prenant les racines, $x = a^{\frac{m}{m+1}} b^{\frac{1}{m+1}}$; donc $x^n = a^{\frac{mn}{m+1}} b^{\frac{n}{m+1}} = a^{n-1}z$; ainſi $z = a^{\frac{m-n+1}{m+1}} b^{\frac{n}{m+1}}$. Cette formule repréſente la moyenne proportionnelle cherchée.

Pour en venir à la conſtruction, élevons les deux membres à la puiſſance $m + 1$, afin d'avoir $z^{m+1} = a^{m-n+1} b^n$. Si m eſt un nombre impair, en faiſant $z^2 = ay$, nous aurons $a^{m-n+1} b^n = a^{\frac{m+1}{2}} y^{\frac{m+1}{2}}$, d'où l'on tire, $y^{\frac{m+1}{2}} = a^{\frac{m-2n+1}{2}} b^n$. Si par le moyen de cette équation on peut trouver y, on aura auſſi z, qui eſt moyenne proportionnelle entre a & y. Si $\frac{m+1}{2}$ eſt un nombre pair, en employant la même méthode, vous tranſporterez la formule à une troiſieme proportionnelle p aux quantités a & y, comme nous venons de le faire à l'égard de y, troiſieme proportionnelle à a & z, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que nous parvenions à un expoſant impair. Il ſuffira donc de conſtruire la formule dans la

ſuppoſition de $m+1$ impair. Multiplions-la par z pour avoir $z^{m+2} = a^{m-n+1} b^n z$, l'expoſant $m+2$ ſera pair ; faites $z^2 = ay$ & vous aurez en diviſant, $y^{\frac{m+2}{2}} = a^{\frac{m-2n}{2}} b^n z$, $\frac{m+2}{2}$ étant un nombre entier. Sur l'axe ad (fig. 81) décrivez la parabole abn de la derniere équation que nous venons de trouver, les ad ſeront $= z$, décrivez enſuite la parabole abm de l'équation $z^2 = ay$, ces deux paraboles ſe couperont au point b, duquel menant l'ordonnée bd, $ad = z$ ſera la moyenne proportionnelle cherchée & $bd = y$ ſera troiſieme proportionnelle aux lignes a & z.

123. PROBLÊME. *Étant donnée la premiere de pluſieurs lignes en progreſſion géométrique, déterminer la ſeconde, enſorte que la ſomme de la ſeconde & de la derniere ſoit égale à une quantité donnée b.* Soit a la premiere, x la ſeconde de ces lignes ; donc la derniere ſera $b - x$, parce que la ſomme de ces deux lignes eſt $= b$. Puiſque a eſt la premiere des lignes proportionnelles & x la ſeconde, la troiſieme ſera $\frac{x^2}{a}$. Si on retenoit cette expreſſion dans le calcul, l'expreſſion de la quatrieme proportionnelle renfermeroit la troiſieme puiſſance d'une inconnue. Pour obvier à cet inconvénient, je fais $\frac{x^2}{a} = y$ & regardant y comme la troiſieme proportionnelle, je trouve la quatrieme, qui peut être exprimée de deux manieres, par le moyen des lettres a, x, y ; ſavoir par $\frac{xy}{a}$, ou par $\frac{y^2}{x}$. Faiſant enſuite $y : \frac{xy}{a} :: \frac{xy}{a} : z = \frac{x^2 y^2}{y a^2} = \frac{y^2}{a}$, à cauſe de $y = \frac{x^2}{a}$, je trouve la cinquieme $= \frac{y^2}{a}$; dans ces formules l'inconnue ne ſe trouve élevée à aucune puiſſance au-deſſus de la ſeconde. Mais ſi en retenant ces expreſſions, nous voulions continuer le calcul, nous trouverions des troiſiemes & quatriemes puiſſances. Pour les éviter, faiſant la quatrieme proportionnelle $= t$,

j'ai la cinquieme $= \frac{tx}{a} = \frac{ty}{x} = \frac{t^2}{y}$. La cinquieme étant supposée $= z$, je détermine les autres jusqu'à la neuvieme, ainsi qu'on le voit ici. On peut pousser le calcul plus loin, en faisant la neuvieme $= s$.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
a	x	$\frac{x^2}{a}$	.	.	.	.	.	.
		y	$\frac{xy}{a}$	$\frac{y^2}{a}$	.	.	.	.
			$\frac{y^2}{x}$		.	.	.	.
			t	$\frac{tx}{a}$	$\frac{ty}{a}$	.	.	.
				$\frac{ty}{x}$	$\frac{tt}{x}$	.	.	.
				$\frac{tt}{y}$		.	.	.
				z	$\frac{xz}{a}$	$\frac{zy}{a}$	$\frac{zt}{a}$	$\frac{zz}{a}$
					$\frac{zy}{x}$	$\frac{tz}{x}$	$\frac{zz}{x}$	
					$\frac{zt}{y}$	$\frac{zz}{y}$		
					$\frac{zz}{t}$			

Venons maintenant à la construction. Si vous supposez que la cinquieme proportionnelle soit la derniere, prenez l'expression $\frac{y^2}{a}$ qui n'a besoin que d'une substitution, vous aurez $\frac{y^2}{a} = b - x$, ou $y^2 = a\,(b - x)$, équation à une parabole, dont le parametre $= a$. D'ailleurs la substitution donne $\frac{x^2}{a} = y$ ou $x^2 = ay$, qui désigne une

parabole de même parametre. Prenant le parametre AB $= a$ (fig. 82) décrivez la parabole Ad, dont la tangente soit Ap, vous aurez la parabole de l'équation $x^2 = ay$. Prenant ensuite A$c = b$, du point c pris pour sommet, décrivez sur l'axe cA la parabole cd de même parametre, elle coupera la premiere en d, & en menant l'ordonnée dp, l'abscisse A$p = x$ sera la seconde proportionnelle cherchée. En effet, la seconde proportionnelle étant x, la troisieme seroit $\frac{x^2}{a}$ & la cinquieme $\frac{x^4}{a} = b - x$, par supposition, d'où l'on tire $x^4 = a^3.(b - x)$. Si l'on prend la valeur de y dans l'équation $x^2 = ay$ & qu'on la substitue dans l'équation $y^2 = a.(b - x)$, il en résultera l'équation $x^4 = a^3.(b - x)$.

Si vous supposez que la sixieme proportionnelle est la derniere, vous aurez $\frac{tt}{x} = b - x$, ou $t^2 = bx - x^2$, équation à un cercle, dont le diametre $= b$. Premierement décrivez la parabole Ad (fig. 83) de l'équation $x^2 = ay$, que donne la substitution ; les abscisses x seront situées sur la tangente Ap. Menez les ordonnées pd (y) perpendiculaires sur Ap, faisant par-tout AB $= a$: Ap (x) :: dp (y) : fp (t), & faites passer une Courbe par tous les points f. Prenant enfin A$c = b$, décrivez sur le diametre Ac, le demi-cercle Afc qui coupera la Courbe AMf en un point f qui déterminera l'abscisse A$p = x$, seconde proportionnelle cherchée.

L'artifice qu'on vient de mettre en usage dans ce Problême, peut souvent rendre élégantes les solutions des Problêmes, qui sont au-dessus du troisieme & du quatrieme degré. Cet artifice consiste en ce qu'à la place des expressions qui, si elles restoient dans le calcul, donneroient des Courbes au-dessus du second ordre, on substitue d'autres inconnues & ainsi en multipliant le nombre des inconnues, par le moyen des Sections Coniques, ou des Courbes plus élevées qu'on décrit en employant ces sections, on trouve la solution du Problême. Pour que la solution soit plus élégante, il faut avoir attention que le nombre des substitutions & le nombre des inconnues dans la derniere équation soit le plus petit possible.

124. REMARQUE. Pour éviter dans la construction des Problêmes les Courbes trop élevées, les Analystes ont établi la Regle suivante : *Si le degré de l'équation à construire est un nombre quarré, on doit se servir de deux Courbes, chacune d'un ordre égal à la racine quarrée de l'ordre de la proposée. Si le degré de la proposée n'est pas quarré, on en retranchera le plus grand quarré, & si le reste est égal ou plus petit que la racine de ce plus grand quarré, on emploiera encore deux Courbes, dont le degré de l'une doit être égal à la racine, le degré de l'autre étant plus grand d'une unité. Si le reste est plus grand que cette racine, on emploiera deux Courbes, dont le degré de chacune surpassera d'une unité la racine de ce quarré ; ainsi pour construire une équation du neuvieme degré, on emploiera deux Courbes du troisieme ordre. Si l'equation est du onzieme degré, en ôtant de 11 le plus grand quarré 9, il restera $2 < 3$ racine de 9. On construira donc avec une Courbe du 3e & une du 4e ordre : dans ce cas on multiplie l'équation du 11e degré par $x = 0$ (on peut aussi la multipler par $x - 0 = 0$), pour qu'elle devienne du 12e degré. Si l'équation est du 12e degré, c'est la même chose ; mais si l'équation est du 13e, 14e ou 15e degré, à cause qu'en ôtant 9 de 13, 14, 15 le reste est plus grand que 3, on sera usage de deux Courbes chacune du 4e ordre.* Mais envain on établit une telle regle, si on n'enseigne comment il faut s'y prendre pour cela ; or c'est ce qu'ils n'enseignent pas. Bien plus il ne paroît pas possible d'observer cette regle. Les équations du 10e & 11e degré se réduisent au 12e, en multipliant les premieres par $x^2 = 0$, & les dernieres par $x = 0$. Soit l'équation du 12e degré délivrée de son second terme $x^{12} + ax^{10} + bx^9 +$ &c. $= 0$; en faisant $x^3 = y$, nous aurons $y^4 + ay^3x +$ &c. $= 0$, équation du quatrieme degré. Si l'on suppose $x^4 = y$, il vient $y^3 + ay^2x^2 + by^2x +$ &c. $= 0$, qui est aussi du quatrieme degré ; ainsi l'on ne peut obtenir par cette méthode deux Courbes, l'une du troisieme, l'autre du quatrieme degré, comme la regle l'exige. Si on avoit l'équation du 16e degré $x^{16} + ax^{14} + bx^{13} +$ &c. $= 0$, en faisant $x^4 = y$, on auroit $y^4 + ay^3x^2 +$ &c. $= 0$, équation du cinquieme degré. C'est pourquoi par cette méthode l'équation du 16e degré ne peut se construire par deux équations du 4e, ainsi que l'exige la regle.

D'ailleurs on doit faire plus d'attention à la facilité de la construction qu'à la simplicité des équations, & quoique l'équation à la parabole soit plus simple que l'équation au cercle, on doit employer celle-ci de préference, à cause de la facilité de sa description; or il arrive souvent que des Courbes plus élevées sont plus faciles à décrire que d'autres moins élevées. Par exemple, la conchoïde est une Courbe du quatrieme degré, plus facile à décrire que plusieurs lignes du troisieme ordre. Ainsi sans nous mettre en peine de cette regle, nous allons enseigner à construire toute équation déterminée par le moyen d'une Courbe de même degré que l'équation, & de la ligne droite. Pour cela on divisera toute l'équation par tous les facteurs du dernier terme, excepté un seul qu'on fera $= y$, on décrira la Courbe dont l'ordonnée est y, en donnant successivement plusieurs valeurs à x. La Courbe étant une fois décrite, on menera parallelement aux abscisses une ligne droite à une distance égale à la quantité qu'on a supposée $= y$. L'intersection de cette droite avec la Courbe donnera toutes les racines réelles de l'équation proposée.

125. EXEMPLE. *Soit l'équation* $x^5 - 2a^2x^3 + a^4x - a^4b = 0$. Divisant tout par a^4, faisant $b = y$ & transposant, j'ai $\frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^3}{a^2} + x = y$. Je décris la Courbe de cette équation. Pour cela je prends aB (fig. 84) pour l'axe & le point a pour l'origine des x, & supposant $x = 0$, je trouve $y = 0$; donc la Courbe rencontre l'axe des abscisses en a. Supposant ensuite $x = \pm a$, je trouve $y = 0$, donc la Courbe rencontre encore son axe aux points c & B déterminés en faisant $ac = a$B $= a$. Si l'on suppose $x = \pm 2a$, l'on trouve $x = \pm 17a$: on peut voir par-là comment on peut trouver tant d'autres points que l'on voudra de la même Courbe. De plus le troisieme terme du premier membre étant supposé une ligne d'une grandeur quelconque, les deux autres peuvent se construire par la méthode (89) ci-dessus. Supposant donc cette Courbe décrite, je mene par l'origine a des abscisses & parallelement aux ordonnées, la ligne $am = b$; & parceque $y = b$ est une équation à une ligne droite parallele à l'axe des x, par le point m je tire mn parallele-

ment aux abſciſſes, les lignes mp, mq, mn interceptées entre le point m & les points auxquels mn rencontre la Courbe, ſont les racines réelles de l'équation propoſée. En effet, appellant Y les ordonnées du nouvel axe mn, on aura $Y = y - b$; or les racines de l'équation $\frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^3}{a^2} + x = Y = y - b$, répondent aux points auxquels $Y = y - b$ eſt $= 0$; donc, &c. *. D'ailleurs ſi on prend la valeur de y dans l'équation $y - b = 0$, & qu'on ſubſtitue cette valeur dans l'équation $\frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^3}{a^2} + x = y$, on trouvera facilement l'équation propoſée.

Si on avoit à conſtruire l'équation $x^7 + abx^3 + c = 0$, on pourroit ſuppoſer $c = y$, & ſuppoſant $d = 1$, faire $y = -\frac{x^7}{d^6} - \frac{abx^3}{d^4}$, ce qui ne change rien, parce que l'unité ne diviſe pas; or les termes de la ſeconde équation ſont faciles à conſtruire pour chaque valeur de x.

Si l'on fait $= r$ le rayon d'un cercle, & $= a$ le coſinus d'un arc ou d'un angle quelconque p, l'équation $r^4 a = 16x^5 - 20r^2x^3 + 5r^4x$ exprimera le rapport qu'il y a entre a & le coſinus de l'arc ſubquintuple, ainſi qu'il ſuit de ce que nous avons dit de la Trigonométrie. Conſtruiſant cette équation par la ligne droite & une courbe du cinquieme ordre, on trouvera cinq racines; l'une de ces racines donnera le coſinus de la cinquieme partie de l'arc p, les autres quatre racines donneront les coſinus des arcs $\frac{4m+p}{5}$, $\frac{8m+p}{5}$, $\frac{12m+p}{5}$, $\frac{16m+p}{5}$, m étant le quart de la circonférence. A chaque coſinus il répond deux arcs, le ſinus étant poſitif ou négatif; mais dans les cas particuliers il n'eſt pas difficile de déterminer lequel de ces arcs eſt celui qu'il faut prendre. Si le nombre des parties dans

* Si l'axe mn touchoit la Courbe en un point, il y auroit des racines égales, parceque les points de ſection ſeroient cenſés ſe confondre en ce point.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 8.

Fig. 14.

Fig. 13.

Fig. 19.

Fig. 17.



Fig. 22.

Fig. 23.

Fig. 25.

Fig. 27.

Fig. 26.

Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 33.

Fig. 37.

Fig. 38.

Fig. 41.

Fig. 42.

Fig. 44.

Fig. 45

Bicquet Sculp.

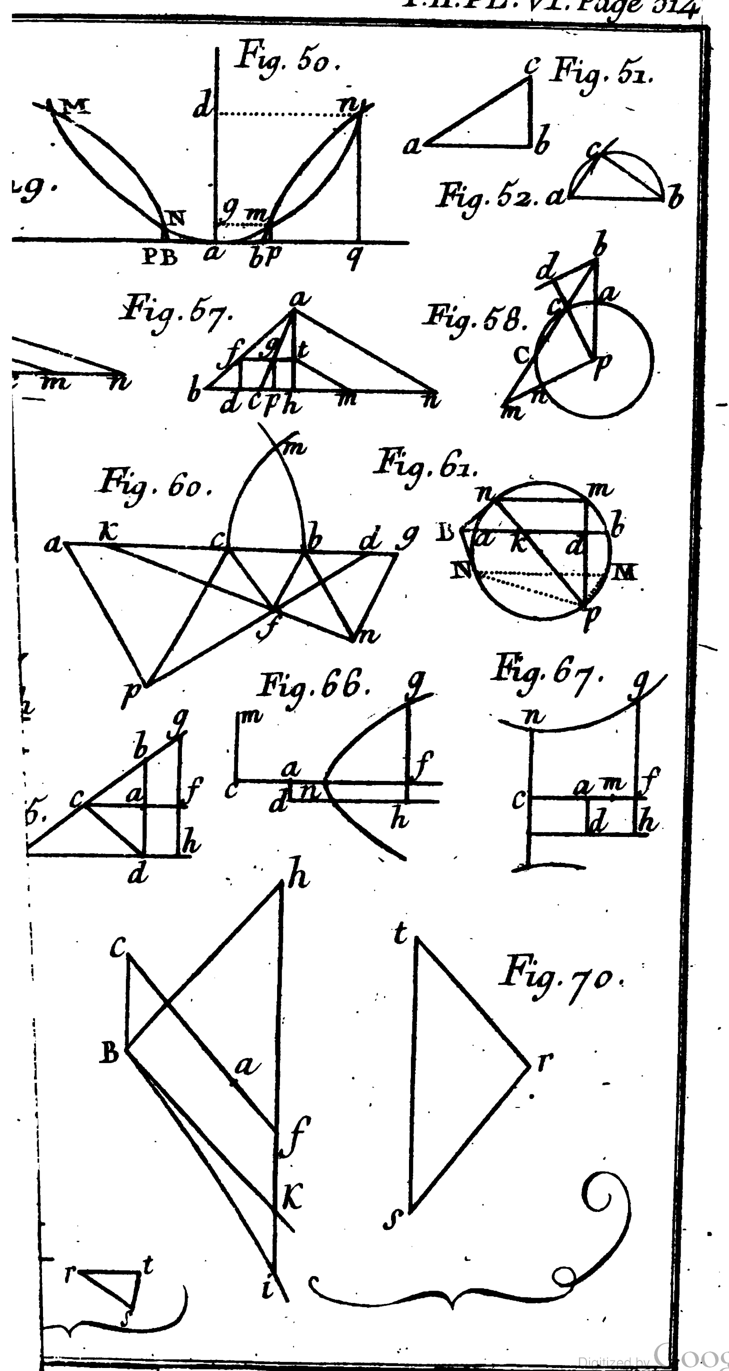


Fig. 50.
M
N
P B
a
b P
q
d
n
g m
Fig. 51.
c
a
b
Fig. 52.
a
c
b
Fig. 57.
a
f
g
t
b
d
c
p
h
m
n
Fig. 58.
b
d
c
a
C
p
n
m
Fig. 60.
m
a
K
c
b
d
g
f
n
p
Fig. 61.
n
m
B
a
k
d
b
N
M
p
Fig. 66.
g
m
a
f
c
d
n
h
Fig. 67.
g
n
c
a
m
f
d
h
b
c
a
f
h
d
h
C
B
a
f
K
i
t
r
s
Fig. 70.
r
t
s

Fig. 74.

Fig 74. A

Fig. 76. A.

Fig. 77.

Fig. 80.

Fig. 81.

Fig. 84.

lesquelles on veut diviser un arc, n'étoit pas un nombre premier, on pourroit diviser ce nombre en ses facteurs, & ceux-ci encore en d'autres facteurs. Par exemple, si on vouloit diviser un arc donné en 30 parties égales, on pourroit d'abord diviser cet arc en 5 parties égales, divisant ensuite chacune de ces parties en 2, & chacune de ces deux en trois autres parties, l'on auroit l'arc divisé en 30 parties égales. Mais si on vouloit diviser un arc en onze parties égales, il faudroit construire une équation du onzieme degré.

126. REMARQUE. On peut par la même méthode trouver les racines réelles d'une équation numérique. Soit l'équation $x^5 - 2x^3 + 3x - 192 = 0$; faisons $a = 2$, $b = 3$, $c = 192$ & cherchons ensuite les racines, comme si a, b, c étoient des lignes qui eussent les rapports des nombres auxquels nous avons supposé ces lettres égales. Supposant que d est l'unité de ligne (ce qui est permis), j'ai $d = 1$, $a = 2d$, &c.; & faisant $c = y$, je trouve les racines de l'équation proposée. Supposons que les racines réelles de cette équation sont mp, mq, mn, les autres étant imaginaires, j'applique d sur ces racines; si je trouve $mp = 2d$, $mq = 6d$, $mn = 15d$, je conclurai que les racines cherchées sont 2, 6 & 15.

COURBES TRANSCENDANTES.

1. LES *Courbes Algébriques* ou *Géométriques*, ainsi que nous l'avons déja remarqué ci-dessus, sont celles dont la nature peut être exprimée par une équation algébrique entre les coordonnées x & y. Mais les *lignes transcendantes*, qu'on appelle encore *méchaniques*, sont telles qu'on ne peut exprimer leur nature par une équation algébrique qui contienne le rapport des coordonnées. Toute fonction qui n'est pas algébrique est *transcendante*. Telles sont les expressions qui contiennent des arcs, des sinus, des cosinus, des tangentes, des sécantes, des loga-

rithmes (du moins des quantités variables), certaines expressions qui contiennent des imaginaires qu'on peut changer en des quantités non-imaginaires, les expressions dans lesquelles un ou plusieurs exposants sont des nombres irrationnels, comme si l'on avoit $y = x^{\sqrt{3}}$. Appellant *y l'ordonnée*, *x l'abscisse*, les Courbes dont la nature est exprimée par les équations suivantes sont méchaniques, $y = a.\ cos.\ x$ (cette expression signifie que y est égal à l'arc a, dont le cosinus est égal à l'abscisse x); $y = a.\ sin.\ x$; $y = a.$ tang. x; $y = a$ cot. x; $y = l.\ x$; $y^m = l.\ x^n$, l désigne le logarithme. Enfin toute équation qui exprimant la relation des coordonnées n'est pas rationnelle ou ne peut pas être rendue rationnelle, est transcendante, & rend transcendante la Courbe qu'elle représente. Les équations $y = x^{\sqrt{5}}$, $y = x^{\sqrt{2}}$ représentent des Courbes transcendantes. M. *Leibnitz* appelle *Courbes intercendantes*, celles dont les variables ont des exposants irrationnels. On ne peut construire la Courbe de l'équation $y = x^{\sqrt{2}}$ par aucune voie géométrique. Si nous voulons nous contenter d'avoir $\sqrt{2}$ par approximation, en mettant à la place de cette quantité quelqu'une des fractions suivantes $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, &c. on aura à la vérité des Courbes algébriques : car supposant $\sqrt{2} = \frac{3}{2}$, il viendra $y = x^{\frac{3}{2}}$, ou $y^2 = x^3$. Mais ces Courbes seront du 3e, 7e, 17e, 41e, &c. ordre ; de sorte que $\sqrt{2}$ ne peut s'exprimer exactement que par une fraction dont le numérateur & le dénominateur soient des nombres infiniment grands ; ainsi cette Courbe est censée d'un ordre infini, & l'on ne peut la regarder comme algébrique.

Si on vouloit construire cette Courbe, on le pourroit par le moyen des logarithmes : car les logarithmes des quantités égales étant égaux, l'équation $y = x^{\sqrt{2}}$ donne $l.y = l.x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.l.x$. De ce que $l.y = \sqrt{2}.l.x$, il suit qu'en multipliant le logarithme de chaque abscisse par $\sqrt{2}$, on aura le logarithme de l'ordonnée correspondante. Ce logarithme fera connoître l'ordonnée, du moins par approximation. En supposant les x positifs, si $x = 0$, on aura $y = 0$; si $x = 1$, on aura $y = 1$. comme cela est évident. Si $x = 2$, $l.y = \sqrt{2}.l.2 = 0.4257274$, à-peu-près ; donc $y = 2.665186$, à-peu-près. Si $x = 10$, on aura $l.y = 1.4142356$, à-peu-près, & $y = 25.956$, à-peu-près. Mais si on suppose x négatif & $= -1, -2, -3$, &c. on ne peut pas définir la valeur de y.

Si l'on suppose $\sqrt{2} = \frac{3}{2}$, l'on a $(-3)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{-27}$, quantité imaginaire ; mais si vous supposez $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, vous aurez $\sqrt[5]{(-3)^7}$, quantité réelle ; de sorte qu'il n'est pas possible de trouver les y correspondants aux x négatifs, parce qu'on n'a pas droit de supposer $\sqrt{2}$ égal à une fraction dont le dénominateur soit impair, plutôt qu'à une fraction dont le dénominateur soit pair.

2. Nous avons dit ci-dessus que certaines expressions qui renferment des imaginaires pouvoient quelquefois se réduire en des quantités non-imaginaires. Soit x un arc pris dans un cercle, dont le rayon $= 1$, on aura le sinus & cosinus d'un arc d'une multiplicité p par les formules $cos. p. x = \frac{(cos. x + \sqrt{-1}. sin. x)^p + (cos. x - \sqrt{-1}. sin. x)^p}{2}$

& *sin.* $px =$

$$\frac{(\text{cos}.\ x + \sqrt{-1}.\ \text{sin}.\ x)^p - (\text{cos}.\ x - \sqrt{-1}.\ \text{sin}.\ x)^p}{2.\sqrt{(-1)}}.$$

Si l'arc x est supposé infiniment petit, en supposant p infiniment grand, pour avoir un produit fini u, on aura $px = u$, $x = \frac{u}{p}$, sin. $x = \frac{u}{p}$, & cos. $x = 1$, parce que le sinus d'un arc extrêmement petit est censé égal à cet arc, tandis que le cosinus d'un arc infiniment petit est censé égal au cosinus d'un arc $= 0$. Substituant ces valeurs de sin. x & cos. x dans les formules ci-dessus, nous aurons

$$\text{cos}.\ px = \text{cos}.\ u = \frac{\left(1+\frac{u}{p}\sqrt{-1}\right)^p + \left(1-\frac{u}{p}\sqrt{-1}\right)^p}{2}$$

$$\&\ \text{sin}.\ u = \frac{\left(1+\frac{u}{p}\sqrt{-1}\right)^p - \left(1-\frac{u}{p}\sqrt{-1}\right)^p}{2\sqrt{(-1)}}.$$

Supposant c égal au nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$, nous aurons $c^z = \left(1+\frac{z}{p}\right)^p$, ainsi que nous allons le prouver dans un moment, & faisant $z = u\sqrt{(-1)}$, on trouvera $1 + \frac{u}{p}\sqrt{(-1)}$ $= 1 + \frac{z}{p}$; $1 - \frac{u}{p}\sqrt{(-1)} = 1 - \frac{z}{p}$; $\left(1+\frac{u}{p}\sqrt{(-1)}\right)^p$ $= \left(1+\frac{z}{p}\right)^p = c^z = c^{u\sqrt{-1}}$; $\left(1-\frac{u}{p}\sqrt{(-1)}\right)^p$ $= \left(1-\frac{z}{p}\right)^p = c^{-z} = c^{-u\sqrt{(-1)}}$; donc nous aurons cos. $u = \frac{c^{+u\sqrt{(-1)}} + c^{-u\sqrt{(-1)}}}{2}$

& sin. $u = \frac{c^{+u\sqrt{(-1)}} - c^{-u\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$, quantités

réelles, toutes les fois que l'arc u est réel. En ôtant les fractions de ces équations, les ajoutant ensuite, transposant, divisant par 2, substituant N au lieu de c, & pz au lieu de u, on aura $N^{+zp\sqrt{(-1)}} = \text{cos.}\, pz + \sqrt{(-1)}.\, \text{sin.}\, pz$; mais en faisant $pz = \frac{x\sqrt{g}}{a}$, on aura $N^{\frac{x\sqrt{g}}{a}\sqrt{(-1)}} = \text{cos.}\, \frac{x\sqrt{g}}{a} + \sqrt{(-1)}.\, \text{sin.}\, \frac{x\sqrt{g}}{a}$. Si on avoit retranché la seconde équation de la premiere, on auroit trouvé $N^{-\frac{x\sqrt{g}}{a}\sqrt{(-1)}} = \text{cos.}\, \frac{x\sqrt{g}}{a} - \sqrt{(-1)}.\, \text{sin.}\, \frac{x\sqrt{g}}{a}$. Ces équations nous serviront dans la seconde Partie de cet Ouvrage (Section 3e n° 290).

Nous avons supposé que $c^{\pm z} = \left(1 \pm \frac{z}{p}\right)^p = 1 \pm \frac{pz}{p} + \frac{p.(p-1).z^2}{2p^2} \pm \frac{p.(p-1).(p-2)z^3}{2.3.p^3}$ &c. en effet, puisque p est supposé un nombre infiniment grand, $p-1=p$, $p-2=p$, &c.; & alors $c^{\pm z} = 1 \pm z + \frac{z^2}{2} \pm \frac{z^3}{2.3}$ &c; car selon ce que nous avons dit dans les Courbes algébriques (47) $c^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2.3}$ &c. Si donc on suppose z un nombre négatif, on aura $c^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2.3}$ &c.

On voit par-là que les Courbes représentées par les équations $y = \frac{c^{+x\sqrt{(-1)}} + c^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$, &

$y = \frac{c^{+x\sqrt{(-1)}} - c^{-x\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$, ſont tranſcendantes ; car la premiere équation eſt la même que $y =$ coſ. x (coſ. x déſigne le coſinus de l'arc x), la ſeconde eſt la même que $y =$ ſin. x. De même la Courbe de l'équation $y =$ coſ. $l. x$ eſt tranſcendante, cette expreſſion ſignifie que y eſt égal au coſinus d'un arc égal au logarithme de l'abſciſſe x.

3. On appelle *logarithmique* une Courbe Mbmn (fig. 1), dans laquelle les abſciſſes at, ap, aq &c. étant ſuppoſées en progreſſion arithmétique, les ordonnées correſpondantes ſont en progreſſion géométrique ; ainſi les abſciſſes correſpondantes ſeront les logarithmes de ces ordonnées. Si l'on prend l'ordonnée ab pour l'unité, les nombres pm, qn plus grands que l'unité, auront des logarithmes poſitifs ; mais les nombres PM plus petits que l'unité, n'auront que des logarithmes négatifs aP. Il eſt viſible que les PM allant toujours en diminuant, les aP augmenteront à l'infini ; donc l'axe des x eſt l'aſymptote de la logarithmique, dont l'équation eſt $x = b. l. \frac{y}{a}$, l déſigne le logarithme hyperbolique. Suppoſant que c repréſente le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$; en multipliant par $l. c = 1$, l'équation ci-deſſus devient $x. l. c = b. l. \frac{y}{a}$, ou $\frac{x}{b}\ l. c = l. \frac{y}{a}$, ou en ôtant les logarithmes, $c^{\frac{x}{b}} = \frac{y}{a}$, ou $y = a. c^{\frac{x}{b}}$. Si on ſubſtitue à la place de x des valeurs 1, 2, 3 &c. en progreſſion arithmétique, les valeurs ſucceſſives de y ſeront en progreſſion géométrique.

4. On

4. On peut rapporter aux Courbes qui dépendent des logarithmes, celles qu'on appelle *exponentielles*; parce qu'il entre des exposants variables dans leur équation : Telle est la courbe de l'équation $y = x^x$; cette expression indique que les ordonnées sont proportionnelles aux puissances x des abscisses x. De cette équation on tire $l.y = x.l.x$. Supposant $x = 0$, on a $y = 1$; si $x = 1$, l'on a $y = 1$. Si $x = 2$, y sera $= 2^2 = 4$; si $x = 3$, on a $y = x^x = 3^3 = 27$, &c. Donc en prenant l'abscisse $ac = x = 1$ (fig. 2), l'on aura $y = cd = 1$, on suppose que les x pris du côté de c sont positifs. Entre a & c on a $x < 1$; de sorte qu'en prenant $aq = \frac{1}{2}$, il vient $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Supposons maintenant $ag = - x$, l'on aura $y = (-x)^{-x} = \frac{1}{(-x)^x}$. Si $x = - 1$, on aura $y = -1$; donc en supposant $ag = - 1$, l'on aura l'ordonnée $gu = - 1$, & le point u appartiendra à la Courbe. Si $x = - 2$, l'on a $y = \frac{1}{4}$; donc à l'abscisse $af = - 2$ il répondra une ordonnée positive fm, mais aucune négative. Si l'on suppose que les abscisses négatives aillent en croissant selon la progression 1, 2, 3, &c. & qu'on prenne leurs ordonnées infiniment proches les unes des autres, l'on aura des ordonnées alternativement positives & négatives, dont les extrêmités formeront des deux côtés de l'axe, une infinité de points séparés les uns des autres, qui ne formeront pas une Courbe continue, mais qui donneront l'apparence d'une telle Courbe; cette singularité n'a pas lieu dans les Courbes algébriques. Voyons si ces sortes de points ont lieu du côté des x positifs. Supposant $x = \frac{1}{2}$, l'on a $y = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$; donc à l'ab-

ſciſſe $aq = \frac{1}{2}$, il répond deux ordonnées égales qn, qN, l'une poſitive, l'autre négative ; & en ſuppoſant ſucceſſivement $x = \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, &c. $\frac{7}{4}$, &c. on verra facilement qu'aux fractions de dénominateur pair il répond deux ordonnées, l'une poſitive & l'autre négative, tandis qu'aux fractions de dénominateur impair il ne répond que des ordonnées poſitives ; donc du côté des x poſitifs, la Courbe a au-deſſous de l'axe une infinité de points ſéparés les uns des autres.

5. Venons aux Courbes dans l'équation deſquelles il entre quelqu'arc circulaire, ou quelque expreſſion dépendante de cet arc : telle eſt l'équation $\frac{y}{b} = a$ ſin. $\frac{x}{c}$; de ſorte que l'ordonnée eſt proportionnelle à l'arc a dont le ſinus eſt égal à l'abſciſſe $\frac{x}{c}$. A cauſe qu'au même ſinus $\frac{x}{c}$ il répond une infinité d'arcs, l'ordonnée y ſera une fonction infinie & coupera la Courbe en une infinité de points. Soit s le plus petit arc correſpondant au ſinus $\frac{x}{c}$, n la demi-circonférence, les valeurs de y (en faiſant $b=1$) ſeront les ſuivantes s, $n-s$, $2n+s$, $3n-s$, $4n+s$, $5n-s$, &c. $-n-s$, $-2n+s-3n-s$, $-4n+s$, &c. Prenant donc CaB (fig. 3) pour l'axe & le point a pour l'origine des abſciſſes, & faiſant $x=0$, les ordonnées y ſeront aA, aA', &c. ab, ab', &c. Parceque l'arc correſpondant au ſinus $\frac{x}{c} = 0$, eſt $= n$, $2n$, &c. $-n$, $-2n$, &c., l'appliquée correſpondante à l'abſciſſe aP coupe la Courbe en une infinité de points m, m', &c. M, M', &c. & l'on aura une infi-

nité d'ordonnées $y = Pm = b. s$, $Pm' = b. (n-s)$; &c. de ſorte que la Courbe ſera compoſée d'une infinité de portions ſemblables. En ſuppoſant $aB = aA = n$, & $b = 1$, les intervales pp, ff ſeront $= 2. n$. Si l'on ſuppoſe $x = c$, l'on aura $\frac{x}{c} = 1$; donc alors le ſinus correſpondant aux points B & C ſera égal au rayon qu'on ſuppoſe $= 1$; or le rayon eſt le plus grand des ſinus; donc l'axe des x eſt terminé aux points B & C.

M. *Leibnitz* appelle cette Courbe *ligne des ſinus*, parce que par ſon moyen on trouve aiſément le ſinus d'un arc quelconque. En effet puiſque $\frac{y}{b} = a$ ſin. $\frac{x}{c}$, on aura réciproquement $\frac{x}{c} =$ ſin. $a. \frac{y}{b}$. Si on ſuppoſe $c = b = aC = CB = 1$, l'abſciſſe $aP = x$ ſera égale au ſinus de l'arc y; & ſuppoſant que $y = Pm$ eſt l'arc de 10 degrés, aP ſera le ſinus de 10 degrés.

Si on ſuppoſe $\frac{y}{b} = \frac{n}{2} - \frac{z}{b}$, on aura $\frac{x}{c} =$ coſ. $a. \frac{z}{b}$; ainſi l'on a en même tems la ligne des coſinus. En ſuppoſant $y = a.$ tang. x nous aurons l'équation d'une courbe tranſcendante qu'on appelle la ligne des tangentes. On aura auſſi la ligne des cotangentes en faiſant $y =$ cot. $a. x$; celle des ſécantes en faiſant $y =$ ſéc. $a. x$; & celle des coſécantes en ſuppoſant $y =$ coſéc. $a. x$.

6. Si on diviſe la circonférence d'un cercle (fig. 4) auſſi-bien que ſon rayon en un même nombre de parties égales, & qu'ayant tiré des rayons à tous les points de diviſion de la circonférence, on prenne ſur le rayon ab correſpondant à la premiere

division, la premiere partie cm du rayon, la seconde sur le second rayon ce, &c. & qu'on fasse passer une Courbe par tous les points ainsi déterminés, en supposant qu'on a divisé la criconférence aussi-bien que le rayon en une infinité de parties, on aura la Courbe $cmpna$ qu'on appelle *spirale d'Archimede*. On peut concevoir cette Courbe formée par le mouvement d'un point n qui coule sur le rayon de c en g & le parcoure uniformément, tandis que l'extrêmité g du même rayon parcoure la circonférence d'un mouvement uniforme. Si on suppose que le point g étant de retour en a on ait décrit un cercle d'un rayon double cq, & que ce rayon fasse encore une révolution autour de c, pendant que le point n parcoure aq, l'on aura une seconde spirale, qui ne sera que la continuation de la premiere; on peut en continuer la description, en supposant ensuite un rayon triple, &c. Soit le rayon $ac = r$, la circonférence $ahfa = c$, l'abscisse circulaire $ab = x$, l'ordonnnée $cm = y$; par la propriété de la spirale, l'on a, $cm : cb :: ab : abga$, ou $y : r :: x : c$; donc $cy = rx$: telle est l'équation de cette Courbe. Si on suppose $cm = y = \frac{r}{6}$, il est visible que $ab = x$ sera $= \frac{c}{6} =$ l'arc de 60°. Si l'on prend $cp = y = \frac{r}{3}$, on aura $x = \frac{c}{3} =$ l'arc de 120°. On peut voir par-là que cette spirale peut servir à diviser le cercle en un nombre quelconque de parties égales; mais la difficulté consiste à décrire cette Courbe d'une maniere exacte.

Si on suppose que $y^m : r^m :: x^n : c^n$, on aura $c^n y^m = r^m x^n$, équation aux spirales de tous les genres. Ces spirales sont nommées *paraboliques*

lorsque m & n sont des nombres positifs, & *hyperboliques* lorsque l'un des deux exposants est négatif, & il est visible que si c, r, x, y exprimoient des lignes droites, l'équation seroit aux paraboles dans le premier cas, & aux hyperboles dans le second cas : On suppose dans le premier cas que l'un des exposans m, ou n est différent de l'unité. En supposant $m = +1$, & $n = -1$; & faisant $r \times c = a^2$, l'on aura $y.x = a^2$, équation qui désigne *une spirale hyperbolique* (on la désigne communément par le nom de *spirale hyperbolique*, & nous lui donnerons le même nom dans la suite de cet Ouvrage). De l'équation $y.x = a^2$ l'on tire $y = \frac{a^2}{x}$; donc pour une autre ordonnée y', l'on aura $y' = \frac{a^2}{x'}$; ainsi $y : y' :: \frac{a^2}{x} : \frac{a^2}{x'} :: \frac{1}{x} : \frac{1}{x'} :: x' : x$; c'est-à-dire que dans cette Courbe les ordonnées sont en raison inverse des abscisses; mais ces abscisses sont circulaires & proportionnelles à l'angle que décrit le point n pendant le mouvement du rayon cg. Donc dans la spirale hyperbolique les ordonnées sont en raison inverse des circulations ; c'est-à-dire, que si le rayon fait deux circulations, l'ordonnée correspondante à la premiere sera double du rayon correspondant à la seconde ; & par conséquent le rayon correspondant à un angle sous-double * sera double du rayon correspondant à un angle double.

* Si on imagine un arc de 300 degrés, on peut concevoir qu'une ligne a tourné autour du centre de cet arc, de maniere que son extrêmité a décrit cet arc ou un arc égal au triple d'un arc de 100 degrés ; c'est-à-dire, plusieurs arcs qui valent ensemble 300 degrés. Si l'arc décrit est

Pour décrire les ſpirales, il faut trouver la valeur de l'arc correſpondant à chaque rayon, après quoi on les décrira aiſément par des points, comme ſi elles étoient algébriques, & cela d'autant plus exactement que l'on prendra des valeurs de ces arcs plus exactes.

7. En ſuppoſant que s repréſente un angle quelconque, ou l'arc qui meſure cet angle pris dans un cercle dont le rayon $= 1$, la Courbe déſignée par $s = n. \mathrm{L}. \frac{y}{a}$ eſt appellée *ſpirale logarithmique*. Dans cette Courbe (fig.^e 5) les angles s autour du point C, ou les arcs pris dans la circonférence dont le rayon $= 1$, & qui ſont proportionnels aux angles s, ſont proportionnels aux logarithmes des rayons y. Si l'on ſuppoſe $n = 1 = a$, il vient $s = l. y$; donc en ſuppoſant les angles s, ou les arcs dont nous venons de parler en progreſſion arithmétique, les rayons correſpondants (que je ſuppoſe repréſentés par CA, Cn, CB, &c.) ſeront en progreſſion géométrique. Si CA repréſente le rayon (que je ſuppoſe $= 1$) du cercle générateur, il eſt viſible qu'on pourra prendre ſur ce rayon une infinité de parties en progreſſion géométrique décroiſſante; de ſorte que la Courbe fera une infinité de révolutions autour du point C avant de parvenir à ce point. On pourra auſſi prendre les rayons CA, Cm, &c. en progreſſion géométrique aſcendante.

C'eſt une propriété de cette Courbe que tous ſes rayons Cm, Cn font avec elle des angles égaux. Pour le prouver ſoit l'angle AC$m = s$, le rayon

de 360° + 100° = 460°, il meſure un certain nombre d'angles qui valent enſemble 460°, & j'appelle leur ſomme un angle de 460°, &c.

$Cm = y$; par l'équation de la Courbe, s eſt $= n.\ L.\frac{y}{a}$, ou $\frac{s}{n} = L.\frac{y}{a}$, ou en multipliant le premier membre par $l.c = 1$, $\frac{s}{n}.\ l.c = l.\frac{y}{a}$, & faiſant diſparoître les logarithmes, $c^{\frac{s}{n}} = \frac{y}{a}$, ou $y = ac^{\frac{s}{n}}$. Prenant enſuite un angle plus grand $ACn = s + u$, on aura $Cn = y' = a.\ c^{\frac{s+u}{n}} = a.\ c^{\frac{s}{n}}.\ c^{\frac{u}{n}}$. Du centre C avec le rayon Cm décrivant un arc ml qui ſera $= yu$ *, on aura $nl = Cn - Cm = a.\ c^{\frac{s}{n}} \times (c^{\frac{u}{n}} - 1)$; or $c^{\frac{u}{n}} = 1 + \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2.n^2} + \frac{u^3}{2.\ 3.n^3} +$ &c**. Donc $c^{\frac{u}{n}} - 1 = \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2.n^2} + \frac{u^3}{2.\ 3.n^3}$ &c.; ainſi nl eſt $= ac^{\frac{s}{n}}.\left(\frac{u}{n} + \frac{u^2}{2.n^2} + \text{\&c.}\right)$: Par conſéquent $\frac{ml}{nl} =$

$$\frac{u}{\frac{u}{n} + \frac{u^2}{2.n^2} + \frac{u^3}{2.\ 3.n^3}\ \text{\&c.}} = \frac{n}{1 + \frac{u}{2.n} + \frac{u^2}{2.\ 3.n^2}\ \text{\&c.}}$$, en

---

* Car le rayon Cm eſt à l'arc ml, comme le rayon 1 eſt à l'arc qui meſure l'angle mCl; ainſi $1 : u :: y : \frac{yu}{1} = yu = ml$.

** Nous avons vu (2) que $c^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2}$ &c. ; donc en ſuppoſant $z = \frac{u}{n}$, on aura $c^{\frac{u}{n}} = 1 + \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2n^2} +$ &c.

multipliant le numérateur & le dénominateur par n, & les divisant par u. Mais si l'on suppose l'angle mCn infiniment petit, la portion mn de la Courbe sera censée se confondre avec la tangente au point n; c'est pourquoi en faisant $nl:lm::1:\frac{lm}{nl}$, on aura la tangente de l'angle fait par la tangente de la Courbe & le rayon Cn, en supposant le sinus total $=1$. Donc faisant $u=\frac{1}{\infty}$, la tangente de l'angle mnC deviendra

$$\frac{n}{1+\frac{0}{2.n}+\frac{0}{6.n^2}\ \&c.}=\frac{n}{1}=n;$$

ainsi cet angle est constant. Si l'on suppose $n=1$, cet angle sera demi-droit, parce que la tangente de 45° est égale au rayon, qu'on fait ici $=1$. Dans ce cas la spirale logarithmique est dite *demi-droite*.

8. Si on divise la circonférence d'un quart de cercle abc (fig. 6) en plusieurs parties égales, & qu'ayant mené des points de division, des rayons au centre du quart de cercle, on divise le rayon ab en un même nombre de parties égales aux points h, p, k, &c. & que par ces points on mene des paralleles au rayon bc jusqu'à la rencontre des rayons bf, bg, bs, la Courbe $aimno$, qui passe par les points de rencontre, est appellée *quadratrice* de *Dinostrate*. Par la nature de cette Courbe l'arc as est à la circonférence asc, comme l'abscisse ah est au rayon ab. Faisant donc l'arc $as=x$, la circonférence $afc=a$, l'abscisse $ah=y$, & le rayon $ab=r$, l'on aura $x:a::y:r$; donc dans cette Courbe on aura $rx=ay$. Pour trouver le point o où la Courbe rencontre le rayon bc, on supposera la ligne bk infiniment petite, l'arc gc sera aussi infiniment petit & pourra être regardé comme une partie infiniment petite de la tangente

au point c, tangente qui, par la propriété du cercle, est perpendiculaire au rayon $b\,c$. Cela posé les triangles semblables $k\,n\,b$, $g\,b\,c$* donnent $bc : kn :: gc : kb$. Mais en supposant la ligne $k\,b$ infiniment petite, le point n est censé se confondre avec le point o; de sorte que $kn = b\,o$. De plus par la nature de la quadratrice, $gc : kb :: afc : ab$**; donc $bc = ab : bo :: afc : ab$, ou $r : bo :: a : r$, d'où l'on tire $bo \times a = r^2$, ou $a : r :: r : bo$, c'est-à-dire que $b\,o$ est troisieme proportionnelle à la circonférence du quart de cercle & au rayon; & par conséquent la circonférence du quart de cercle est troisieme proportionnelle à la ligne $b\,o$ & au rayon.

COROLLAIRE. Donc si on pouvoit trouver géométriquement le point o, on trouveroit aussi géométriquement la longueur du quart de cercle, & en quadruplant l'on auroit la longueur de la circonférence entiere; d'où dépend la quadrature du cercle. Mais on ne peut trouver ce point géométriquement : car en supposant $k\,n$ infiniment proche de $b\,c$, cette ligne ne peut couper le rayon $b\,g$ lorsque le point g se confond avec le point c, parce que $k\,n$, étant parallele à $b\,c$, est alors parallele à $b\,g$, ou si l'on veut, parce que $k\,n$ se confond alors avec, $b\,g$ & $b\,c$.

9. Si on suppose que le rayon $a\,b$ (fig. 7) se meuve le long de $b\,c$ parallelement à lui-même, de sorte qu'il parcoure le quart de cercle $a\,d\,c$ dans le même

* A cause des angles droits en c & en k, & des angles alternes internes $k\,n\,b$, $n\,b\,c$.

** Car $a\,k$ & $a\,g$ étant des parties semblables du rayon & du quart de cercle par la nature de la Courbe, les restes $k\,b$ & $g\,c$ seront aussi des parties semblables du rayon & du quart de cercle; mais par la nature de la Courbe $r : a :: ka : ag$; donc $kb : gc :: r : a$, ou $gc : kb :: a : r$.

tems que la ligne pm restant toujours parallele à bc, parcourrera la ligne ab, de maniere que l'on ait toujours la circonférence adc du quart de cercle : $ad :: ab : ap$, la Courbe qui passera par tous les points m d'intersection des deux droites fd, pm, est appellée *quadratrice* de *Tschirnaus*, qui l'a inventée à l'imitation de celle de *Dinostrate*. Faisant $adc = a$, $ad = x$, $ap = y$, $ab = r$, nous aurons $a : x :: r : y$; donc l'on a dans cette Courbe $rx = ay$.

Si l'on veut avoir une équation différente pour la quadratrice de *Tschirnaus*, on remarquera que $pm = od$ est $=$ sin. x, & que par l'équation $rx = ay$, l'on a $y = ap = \frac{rx}{a}$; donc $bp = r - \frac{rx}{a}$. Mais le triangle rectangle pmb donne (en supposant $bm = z$) $z^2 = (\text{sin. } x)^2 + \left(r - \frac{rx}{a}\right)^2$, ou $a^2 z^2 = a^2 . (\text{sin. } x)^2 + (ar - rx)^2$.

Dans la quadratrice de *Dinostrate* (fig. 6), en tirant sd parallele à bc, l'on a $sd = \text{sin. } x$, $bd = \text{cos. } x$; & par l'équation $rx = ay$, il vient $y = ah = \frac{rx}{a}$; or les triangles semblables bsd, bih donnent $bd : bs :: bh : bi$, ou cos. $x : r :: r - \frac{rx}{a} : z$, en supposant $bi = z$; donc $z = \frac{ar^2 - r^2 x}{a. \text{cos. } x}$. Cependant cette équation ne fait point trouver le point o, car en faisant $x = a$, l'on a $z = \frac{r. a^2 - r^2 . a}{o} = \frac{o}{o}$, équation qui n'apprend rien, ce qui semble prouver l'impossibilité d'avoir le point o géométriquement.

10. Si sur la droite aB on fait rouler un cercle

a M z (fig. 8) qui la touche d'abord au point a, ce point en faisant un tour entier décrira par un mouvement composé du rectiligne & du circulaire une Courbe $a\,t$ B qu'on appelle *cicloïde* ou *roulette*. La droite a B se nomme la *base*, qui est évidemment égale à la circonférence du cercle roulant, dont tous les points s'appliquent successivement sur cette ligne. La perpendiculaire $f\,t$ tirée sur le milieu de la base a B & passant par son sommet t, s'appelle l'*axe*. Le cercle roulant a M z, ou $d\,c\,z$ qui est le même dans toutes les situations, s'appelle le *cercle générateur*.

Si le cercle générateur en roulant uniformément est supposé être parvenu dans la situation $d\,c\,z$, il est visible que tous les points de l'arc $c\,d$ s'étant appliqués successivement sur $a\,d$, on a l'arc $d\,c = a\,d$. Si par le point c on tire $c\,l$ parallele à Ba, les arcs $g\,f$, $c\,d$, compris entre les mêmes paralleles, seront évidemment égaux, aussi-bien que leurs cordes, qui sont également inclinées à la tangente commune $d\,f$, & par conséquent paralleles entre elles; donc $c\,g\,f\,d$ sera un parallélogramme & $d\,f = c\,g$. Mais la base a B étant égale à la circonférence entiere du cercle générateur, sa moitié $a\,f$ doit être égale à la demi-circonférence $f\,g\,t$. D'autre côté l'arc $d\,c$ est $= a\,d = f$Ng; donc $d\,f = c\,g = g$Pt; ainsi l'ordonnée $c\,g$ (y) est égale à l'abscisse circulaire gP$t = x$; de sorte que dans la cycloïde l'on a $y = x$. Si l'on fait la demi-circonférence $f\,g\,t = a$, la demi-base $= b$, l'on aura toujours $b : a :: y : x$; donc $b\,x = a\,y$. Si l'on suppose que C : D :: $x : y$, on aura une cycloïde, qu'on appelle *allongée* lorsque D > C & accourcie dans le cas contraire; ainsi l'équation de ces cycloïdes sera $y = \frac{Dx}{C}$.

Puiſque les lignes PQ, nq ſont égales aux arcs tP, tn, ſi l'on mene qr parallele à PT tangente du cercle, on aura $qr = nP = Qr$, & le triangle Qrq ſemblable à qnT, ſera iſocelle ; donc $PQ = PT$. Mais l'angle DPT extérieur au triangle QPT eſt double de TQP ; donc ſa moitié tPD (car l'angle TPD a pour meſure la moitié de l'arc PtD, & tPD a pour meſure la moitié de tD, ou de tP) eſt $= TQP$; donc la tangente QT de la cycloïde eſt parallele à la corde correſpondante Pt du cercle générateur.

Si l'on veut rapporter le point c de la cycloïde à l'axe tf en faiſant $ck = y$, on remarquera que $ck (y) = cg + gk = tPg + gk = x + \text{ſin. } x$. Et pour les cycloïdes allongées ou accourcies, l'on aura $y = \frac{Dx}{C} + \text{ſin. } x$.

REMARQUE. En ſuppoſant toujours $gPt = x$ & $gc = y$, ſi l'on fait $C^m : D^n :: x^m : y^n$, ou $C^m y^n = D^n x^m$, on aura des Courbes que nous appellerons *cycloïdes de tous les ordres.*

11. Si l'on imagine qu'un fil enveloppant la demi-cycloïde dmA (fig. 9) ſe développe ſucceſſivement, en ſorte que l'extrêmité d de ce fil décrive la Courbe dnh, il eſt évident que chaque partie du fil tendu (que nous appellerons *rayon de la dévéloppée*) eſt toujours égale à l'arc correſpondant de la Courbe ; que lorſque le point décrivant eſt arrivé en h après tout le développement du fil, alors ce rayon eſt égal à la demi-cycloïde dmA. Il eſt viſible que l'extrêmité du fil décrit à chaque inſtant un arc circulaire infiniment petit, ſur lequel le rayon correſpondant mn eſt toujours perpendiculaire, &. que la Courbe dnh eſt compoſée de l'aſſemblage de tous ces petits arcs. De plus le rayon

mn eſt toujours tangente à la demi-cycloïde dmA; n'étant autre choſe que le prolongement rectiligne d'un arc infiniment petit (de la Courbe) ſitué en m, arc qu'on peut regarder comme une ligne droite infiniment petite; donc par la propriété de la cycloïde mn eſt parallele à la corde dp. Maintenant ſi on ſuppoſe que la Courbe dnh eſt une demi-cycloïde égale à la développée dmA, on aura mn perpendiculaire à la tangente nT; or nT eſt parallele à lh; ainſi ng eſt parallele & égale à li. Mais l'angle $lig = ngd$ eſt $= gdp$; donc les arcs pop, lMi (dont les moitiés meſurent les angles gdp, lig) ſont égaux auſſi-bien que leurs cordes; ainſi $li = ng = dp = gm$; donc $mn = dp + ng$ eſt $= 2\,dp$; c'eſt-à-dire, que le rayon de la développée eſt égal au double de la corde correſpondante du cercle générateur; donc la demi-cycloïde eſt double du diametre du cercle générateur, & la cycloïde entiere eſt quadruple du même diametre.

REMARQUE. Nous avons ſuppoſé que la Courbe dnh eſt une demi-cycloïde égale à la développée dmA; or cela eſt en effet, car ſuppoſons que dnh eſt une Courbe différente, dans ce cas en décrivant une demi-cycloïde qui paſſe par le point d & dont la demi-baſe ſoit $di = BA$, on auroit deux Courbes différentes qui auroient le point d commun & ſur leſquelles tous les rayons mn ſeroient perpendiculaires; or cela eſt impoſſible : car alors tous les petits arcs de ces Courbes ſitués ſur les rayons mn ſeroient paralleles, & par conſéquent les arcs ſitués en d le ſeroient auſſi. Mais ces arcs ſe confondent en d; donc ils doivent ſe confondre par-tout; donc ces deux Courbes ne ſont pas différentes.

COROLLAIRE I. Nous venons de voir que mn

tangente de la demi-cycloïde *d* A au point *m* étoit parallele à la corde *d p ;* donc pour mener une tangente à une cycloïde au point *m*, il suffira, après avoir tiré l'ordonnée *m p* & la corde *p d*, de mener la ligne *m n* parallele à la corde *p d*. Donc (fig. 8) pour mener la tangente *c h* au point *c* de la cycloïde *a c t* B, on tirera l'ordonnée *c g*, la corde correspondante *g t*, & la ligne *c h* parallele à cette corde sera la tangente demandée. Mais l'angle inscrit *f g t* appuyé sur le diametre *t f*, est droit; donc l'angle *d c h* dont les côtés sont paralleles à ceux de l'angle *f g t*, est droit aussi, & la ligne *d c* est perpendiculaire sur la tangente *c h*.

COROLLAIRE II. Si l'on attache un corps à l'extrêmité M du rayon *t* M de la développée *c* B (fig. 10), qu'on suppose une demi-cycloïde, le corps M parcourera la demi-cycloïde B M *f* pendant le développement de la demi-cycloïde *c c* B. Le même corps parcourrera l'autre demi-cycloïde *f* P A pendant que le fil *c f* enveloppera la demi-cycloïde *c* T A. Si donc *c* A & *c* B sont supposées des lames cycloïdales, le pendule *c f* pourra osciller dans une cycloïde B *f* A.

12. PROBLÊME. *Trouver le temps de la description d'un arc quelconque* M *f par un corps* M *mis en mouvement par sa seule gravité dans un milieu sans résistance.* Supposant, comme on le démontre en Méchanique, que les temps sont, comme les racines des hauteurs verticales parcourues dans la descente ; que les vîtesses acquises sont dans le même rapport ; que ces vîtesses sont les mêmes lorsqu'un corps est tombé librement le long d'un plan vertical L *f*, ou d'un plan incliné *f g* (ou du plan Courbe M *f*) de même hauteur, on aura $\sqrt{(Lf)}$ proportionnelle à la vîtesse dans *g f ;* & si le point *g* est supposé plus près du point *f*, $\sqrt{(Lf)}$ sera encore proportionnelle à la vîtesse dans la nouvelle corde correspondante : or les cordes *f g* sont toujours paralleles aux arcs élémentaires correspondants de la cycloïde, comme

on peut le conclure de ce que nous venons de dire (11), & sont les moitiés des arcs Mf; donc ces vîtesses ou les $\sqrt{(Lf)}$ sont toujours les mêmes pour les points g des cordes gf & les points M des arcs correspondants. Mais par la propriété du cercle, $Df : gf :: gf : Lf$ (voyez la Géométrie); donc $Lf = \frac{(gf)^2}{Df}$, ou $\sqrt{(Lf)} = \frac{gf}{\sqrt{Df}} = \frac{fM}{2\sqrt{(Df)}}$, à cause de $fM = 2fg$ (11); donc les vîtesses dans la cycloïde Mf sont comme les $\frac{gf}{2\sqrt{(Df)}}$, ou (à cause de la constante $2\sqrt{(Df)}$) comme les gf; c'est-à-dire, que les vîtesses sont comme les cordes, & par conséquent comme les doubles de ces cordes, ou comme les arcs Mf; donc les vîtesses sont comme les espaces parcourus; & partant les arcs Mf grands ou petits sont parcourus en temps égaux, ce qui est une belle propriété de la cycloïde.

Des Problêmes Méchaniques.

13. *La solution d'un Problême est méchanique lorsqu'on emploie une ou plusieurs Courbes méchaniques pour le résoudre.*

14. PROBLÊME I. *Etant donnée une ligne a, en trouver une autre x qui soit à la ligne a comme $a^m : a$.* Supposant décrite une logarithmique nbM (fig. 1), cherchez sur cette ligne une ordonnée $ab = a$, & une autre ordonnée plus petite PM que vous supposerez $= a^0 = 1$, prenez ap en sorte que l'on ait $Pp : aP :: m : 1$, l'ordonnée mp sera la ligne x cherchée. En effet, par la propriété de la logarithmique, Pa étant le logarithme de $a = a^1$, Pp sera celui de Pm; or $Pp : Pa :: m : 1$; donc Pp est le logarithme de $a^m = x$; ainsi la ligne cherchée x est $= pm$. Si m étoit un nombre négatif, le point p seroit situé à la gauche du point P.

15. PROBLÊME II. *Etant donné un demi-cercle tsf, dont le diametre est tf & le centre* C (fig. 8), *on demande de trouver un point m hors du demi-cercle, d'où ayant abaissé sur tf la perpendiculaire mp qui rencontre en* D *ce demi-cercle, la partie m*D *de cette perpendiculaire soit égale*

à l'arc tD *correspondant, & que le rectangle* $tp \times pm$ *soit égal au quarré du rayon* tC. Supposant la chose faite, soit $tC = a$, $tp = p$, $pm = y$, l'arc $tD = x$, la ligne $mD = u$; fp sera $2a - p$. Par la nature du Problême on a $u = x$, équation à la cycloïde ordinaire; de plus $tp \times pm = (tC)^2$, ou $p.y = a^2$, équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. Supposant décrite la cycloïde atB, je mene le rayon Cs & la ligne tH paralleles à fB, & prenant les lignes tf, tH pour asymptotes, je décris par le point s une hyperbole équilatere sm qui coupera la cycloïde au point cherché. En effet par la propriété de l'hyperbole, $tp \times pm$, ou $tp \times tH = tC \times tA = (tC)^2$, ou $p.y = a^2$; donc, &c.

SURFACES COURBES.

16. Il y a une si grande connexion entre les Courbes à double courbure & les Surfaces courbes, que nous ne devons pas parler des Courbes à double courbure sans avoir auparavant donné quelques notions sur les surfaces Courbes.

Supposons trois lignes (fig. 11) ap (axe des x), aq (axe des y), les lignes aq & ap sont perpendiculaires l'une à l'autre, & ar (axe des z), cette ligne est perpendiculaire au plan qap, & par conséquent aux lignes aq, ap. Le plan dans lequel se trouvent aq & ap, sera appellé *le plan des x & des y*; le plan dans lequel se trouvent aq & ar sera appellé *le plan* des z & des y; enfin le plan dans lequel se trouvent ar & ap, sera nommé *le plan des z & des x*.

17. THÉORÊME. *Si on a une équation à trois variables* x, z & y, *je dis qu'elle exprimera toujours une surface.* Car en donnant une valeur déterminée à la variable $ap = x$, cette équation n'aura plus que deux variables y & z, c'est-à-dire, pm & mn; donc elle exprimera le lieu d'une ligne droite ou courbe dont pm & mn seront les coordonnées, mn étant supposée parallele à ra, & pm parallele à aq; & comme l'on peut donner à x une infinité de valeurs déterminées & différentes, de maniere que les points

points p, p soient infiniment proches, on pourra concevoir une infinité de lignes gn infiniment proches les unes des autres, & une surface $gnng$ dans laquelle se trouvent toutes ces lignes.

Si l'équation aux trois variables x, y, z est du premier degré, en considérant x comme un parametre variable toutes les lignes gn seront des droites semblables (en regardant les quantités x, y & z comme déterminant seules le degré de l'équation, ainsi que cela suit de ce que nous avons dit sur les Courbes algébriques semblables); c'est-à-dire, également inclinées aux pm, & elles seront toutes situées sur une surface plane; mais si x monte au second degré, on ne pourra faire varier x qu'il n'y ait, pour ainsi parler, deux paramètres variables à la fois, ce qui rendra les lignes gn inégalement inclinées aux pm, & quoiqu'on les suppose droites, la surface sera courbe, c'est-à-dire, n'aura pas tous ses points dans un même plan; à plus forte raison elle le sera si les gn sont des lignes courbes.

18. PROBLÊME. *Trouver l'équation de la surface d'une Sphere dont le centre est c, & a c B un diametre placé sur un plan donné de position cpm* (fig. 12). Ayant pris un point quelconque n de la Sphere, abaissez la perpendiculaire nm sur le plan donné cpm, & du point m où cette perpendiculaire rencontre le plan, menez mp perpendiculaire au diametre aB. Faisant ensuite le rayon de la Sphere, $ca = cB = cn = a$, les variables $cp = x$, $pm = y$ & $mn = z$, on aura par la propriété du triangle rectangle pmn, $(pn)^2 = y^2 + z^2$; mais le triangle rectangle cnp * donne $(cn)^2 = (pn)^2 + (cp)^2$, ou $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$, équation cherchée.

19. PROBLÊME. *Trouver l'équation de la surface d'un Cône droit* (fig. 13). Supposons que le côté indéfini ca de l'angle constant acp, tourne autour de l'axe cp, le côté ac décrira dans ce mouvement la surface d'un cône droit. D'un point quelconque n de cette surface abaissons la perpendiculaire nm sur le plan cpm, menons pm perpendiculaire à l'axe cp, & tirons pn. Il est visible que le

* cB étant perpendiculaire sur le plan du triangle pnm, est nécessairement perpendiculaire à pn.

triangle rectangle nmp donne $(pn)^2 = y^2 + z^2$ (cpm est supposé le plan des x & des y, que nous appellerons aussi le *plan de la base*). Supposant maintenant que le cosinus de l'angle acp ou de son égal ncp est $= m$, & son sinus $= n$; à cause de pn perpendiculaire sur cp, on aura $m : n :: cp(x) : pn = \frac{nx}{m}$; donc en substituant, $\frac{n^2 x^2}{m^2} = y^2 + z^2$, ou $n^2 x^2 = m^2 y^2 + m^2 z^2$, équation cherchée.

20 PROBLÈME. *Etant donnée une Courbe ca* (fig. 14) *avec son axe des abscisses cB, ses abscisses $cp = x$, ses ordonnées $pa = u$, on demande l'équation de la surface que décrira la Courbe en tournant autour de son axe cB.* Prenant un point quelconque n dans cette surface, abaissez nm perpendiculairement sur le plan de la base cpa, menez mp perpendiculaire à l'axe cB & tirez pn. Le triangle rectangle pnm donne $(pn)^2 = (pa)^2 = u^2 = z^2 + y^2$, équation cherchée.

COROLLAIRE I. Si la Courbe est une parabole ordinaire, dont l'équation soit $ax = u^2$, l'on aura $ax = z^2 + y^2$, équation de la surface du paraboloïde acn. Si la parabole avoit tourné autour de sa tangente au sommet, l'équation étant alors $x^2 = au$, l'on auroit $u^2 = \frac{x^4}{a^2}$, & l'équation seroit $x^4 = a^2 z^2 + a^2 y^2$.

COROLLAIRE II. Si on fait tourner une hyperbole équilatere autour d'une de ses asymptotes, on prendra la valeur de u^2 dans l'équation $ux = a^2$ de cette hyperbole, ce qui donnera $u^2 = \frac{a^4}{x^2}$; donc l'équation cherchée sera $a^4 = z^2 x^2 + y^2 x^2$.

Soit la Courbe ca une parabole ou une hyperbole d'un genre quelconque, dont l'équation est $u^m = a^{m-1} x$, l'on aura $u = a^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$, $u^2 = a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}}$; donc l'équation sera $a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}} = y^2 + z^2$. Si m est une quantité positive, on aura l'équation de la surface des paraboloïdes de tous les genres, si m est négative on aura

l'équation de la surface d'un hyperboloïde d'un genre quelconque. Si on suppose $a = 1$, ce qu'on peut toujours faire, on aura $x^2 = (y^2 + z^2)^m$.

COROLLAIRE III. L'équation de la cissoïde étant $u^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (voyez les Courbes algébriques (71), u représente ici l'ordonnée de la cissoïde), l'on aura $\frac{x^3}{2a - x} = z^2 + y^2$, équation de la surface du conoïde cissoïdal.

REMARQUE. Nous avons supposé que les coordonnées x & u étoient perpendiculaires l'une à l'autre; or c'est ce qu'on peut toujours obtenir dans les Courbes algébriques.

COROLLAIRE IV. Pour avoir l'équation de la surface formée par une Courbe qui tourneroit autour d'une ligne à laquelle les ordonnées ne seroient point perpendiculaires, on chercheroit l'équation de la Courbe par rapport à des ordonnées perpendiculaires à cette ligne qu'on prendroit pour l'axe des x.

21. PROBLÊME. *Soit proposé d'examiner la surface courbe de l'équation* $xyz = b^3$ (fig. 15). En faisant aP $= x = 0$, j'ai $yz = \frac{b^3}{0} = \infty$; or les lignes y & z se trouvent dans le plan QaR, lequel ne rencontre la surface courbe qu'à l'infini; c'est-à-dire, que ce plan est le plan asymptotique de la surface. Faisant $x = \infty$, il vient $yz = \frac{b^3}{\infty} = 0$; d'où l'on tire $y = 0$ & $z = 0$, ce qui marque que la Courbe a encore pour plans asymptotiques les plans RaP & aPm. Supposant $x = d$, l'on a $yz = \frac{b^3}{d}$, ce qui donne deux hyperboles opposées gn, $g'n'$, dont les asymptotes sont mm', sS, & la puissance $\frac{b^3}{d}$. La surface a deux parties égales & semblables, renversées l'une à l'égard de l'autre, & qui contiennent une infinité d'hyperboles, que l'on trouve en faisant successivement $x = d$, $x = d'$, &c. La premiere de ces deux parties est au-dessus du plan de la base, & la seconde au-dessous.

Je fais ensuite x négatif & $= -d$, ce qui donne $yz = -\frac{b^3}{d}$, & parce que cette équation représente deux hyperboles opposées hH & h'H' situées sur le plan LMl, ayant pour asymptotes les lignes MN, Ll; la Courbe a encore du côté des x négatifs deux parties égales aux premieres. En donnant de même des valeurs à y & ensuite à z, il ne sera pas difficile de trouver les équations & les Courbes qui en résulteront.

REMARQUE. C'est en donnant successivement différentes valeurs à chacune des variables, qu'on peut connoître la nature des Courbes par lesquelles passe la surface dont on a l'équation, ce qui suffit aussi pour faire connoître cette surface. Si en donnant à une inconnue une valeur négative quelconque, il en résulte une équation fausse, ou imaginaire, c'est une marque que la surface ne s'étend pas de ce côté; de même la surface ne s'étenderoit pas du côté d'une inconnue positive, si toutes les valeurs positives de cette inconnue produisoient une équation fausse ou imaginaire. Si la supposition de $x = \infty$ donnoit $y = c$, la surface auroit pour plan asymptotique un plan parallele à celui des z & des x, mais éloigné de ce plan à une distance $= c$. Si au contraire cette supposition donnoit $z = c$, alors le plan asymptotique seroit parallele au plan de la base & éloigné de ce plan de la distance c. Si cette supposition donnoit une équation entre z & y qui exprimât une ligne droite, ou courbe, décrivant ce lieu sur le plan RaQ des y & des z, & élevant dessus une surface composée d'une infinité de perpendiculaires à ce plan, cette surface seroit asymptotique à la surface courbe, qu'elle ne rencontreroit qu'à l'infini. Si l'équation qui résulte de la supposition de $x = d$, par exemple, donnoit une équation divisible en deux, ou plusieurs autres équations qui exprimeroient des lignes droites ou courbes, alors la surface passeroit par ces lignes tracées sur un plan parallele à celui des y & des z, comme cela est évident. Il n'est pas difficile de voir qu'en faisant pour chacune des autres variables, ce que nous venons de faire pour x, on connoîtra les lignes par lesquelles doit passer la surface courbe, & par conséquent la nature de cette surface. Si l'équation est du premier degré, pour connoître la position de cette surface, qui dans

ce cas (17) eſt plane, on fera à la fois deux des variables $=0$, il en réſultera une équation à une ligne droite, par laquelle la ſurface paſſera. Faiſant enſuite $=0$, une de ces variables & celle qu'on avoit conſervée dans la premiere équation, il en réſultera une autre droite, par laquelle la ſurface doit paſſer. En faiſant à la fois $=0$, les variables qu'on n'avoit pas ſuppoſées égales à la fois à o dans les deux premieres opérations, on aura une troiſieme ligne, par laquelle doit paſſer la ſurface; or connoiſſant trois lignes ſituées dans les plans des z & des y, des z & des x, des x & des y, par leſquelles paſſe une ſurface plane, il eſt évident qu'on connoît ſa poſition.

COURBES A DOUBLE COURBURE.

22. UNE ligne courbe, dont tous les points ne ſont pas ſitués dans le même plan, eſt une *ligne à double courbure*: telle ſeroit la ligne qu'on formeroit en faiſant tourner un compas ſur la ſurface convexe d'un cylindre, ou d'un cône.

23. Soit une Courbe à double courbure $a\,n$, dont par conſéquent tous les points ne ſont pas ſitués dans un même plan (fig. 16), ayant pris les trois axes ar, aq, aB perpendiculaires les uns aux autres, par le moyen deſquels on détermine les trois plans des x & des y, des x & des z, des y & des z perpendiculaires l'un à l'autre, d'un point quelconque n de la Courbe je tire nm perpendiculaire ſur le plan des x & des y, par le point m je mene mp perpendiculaire à ap, je fais $nm=z$, $mp=y$, $ap=x$; de ſorte que les variables z, y, x ſeront les coordonnées de la Courbe propoſée. Si l'on a deux équations entre ces coordonnées, on pourra déterminer la nature de la Courbe: car en éliminant z par le moyen de ces équations, il en réſultera une équation entre y & x qui déterminera la poſition du point m ſur le plan $q\,a\,p$ des x & des y, & tous les points m déterminés par l'équation entre x & y donneront la Courbe $a\,m\,f$, dans laquelle ſe trouvent tous les points m correſpondants à tous les points n de la Courbe à double courbure. La Courbe $a\,m\,f$ eſt appellée *la projection de la Courbe* $a\,n$ ſur

le plan des x & des y *. Pour avoir la projection de la Courbe $a\,n$ sur le plan des y & des z, on éliminera x, & l'équation entre z & y qui en résultera, donnera la Courbe cherchée. En éliminant y on aura la projection sur le plan des z & des x. Une seule projection ne suffit pas pour faire connoître la Courbe $a\,n$; mais si pour tous les points m (supposés connus par la nature de la Courbe $a\,m$) on connoît les perpendiculaires $m\,n$ ou les z correspondants, on pourra construire la Courbe $a\,n$; or pour cela il suffit d'avoir une équation entre z & x, ou entre z & y, ou entre z, y & x. Dans le premier cas étant donnés $a\,p = x$, on pourra trouver z; dans le second cas étant donnés $p\,m$ ou y, on aura z, & dans le troisieme étant donnés x & y, on aura z; donc étant donnée la projection d'une Courbe à double courbure $a\,n$ sur le plan des y & des x, avec la projection de la même Courbe sur le plan des y & des z, on aura pour chaque valeur de $y = p\,m$, la valeur correspondante de $z = m\,n$. Il en sera de même, si au lieu de la projection sur le plan des y & des z, on a la projection sur le plan des x & des z: car alors pour chaque $a\,p$ l'on a le z ou $m\,n$ correspondant; ainsi on pourra décrire la Courbe $a\,n$. De plus si sur tous les points de la projection $a\,m\,f$, on éleve des perpendiculaires indéfinies pour avoir une surface cylindrique indéfinie **, & que de tous les points de la projection sur le plan des y & des z, ou des x & des z on éleve des perpendiculaires à ces plans, les surfaces cylindriques qui en résulteront, se rencontreront évidemment dans des points qui formeront la Courbe à double courbure $a\,n$. Donc si l'on a une surface dans laquelle soit contenue la Courbe à double courbure, la surface cylindrique élevée sur la projection de cette Courbe tracée sur un des plans dont nous venons de parler, rencontrera la surface en des points qui appartiendront à la Courbe à double courbure. On peut voir par-là comment l'intersection des deux surfaces peut donner une Courbe à double courbure.

* Il faut concevoir $a\,q$ perpendiculaire à $a\,p$.

** Nous entendons ici par *surface cylindrique*, une surface quelconque qui enveloppe un solide d'une grosseur uniforme, dans toute sa longueur, que nous appellerons *cylindre*, & dont la circonférence de la base peut être une ligne différente de la circulaire.

24. PROBLÊME. *Etant données deux ſurfaces courbes qui ont les mêmes axes & les mêmes variables pour coordonnées, trouver la Courbe à double Courbure qui en ſera la ſection ; c'eſt-à-dire, dans laquelle une ſurface rencontrera l'autre.* Le Problême ſe réduit à trouver deux des Courbes de projection de la Courbe à double courbure ſur deux plans perpendiculaires l'un à l'autre : car les cylindres, élevés ſur ces projections, formeront, par leur rencontre, la Courbe à double courbure cherchée ; mais pour trouver ces projections, il ſuffit de s'y prendre comme nous venons de le dire.

25. EXEMPLE I. Soit propoſé de trouver la Courbe à double courbure qui eſt la ſection d'un paraboloïde & d'un cône droit qui a le même ſommet, mais dont les axes ſont perpendiculaires l'un à l'autre ; ces axes ſont pour le paraboloïde celui des x, & pour le cône celui des y. L'équation de la ſurface du paraboloïde eſt (20) $ax = y^2 + z^2$; mais celle de la ſurface du cône ſera $\frac{n^2}{m^2} y^2 = x^2 + z^2$, au lieu de $\frac{n^2}{m^2} x^2 = y^2 + z^2$ (19), parce que préſentement les x ſont à la place des y. Prenant la valeur de z^2 dans l'équation de la ſurface du paraboloïde, & la ſubſtituant dans celle de la ſurface du cône, on aura l'équation $\frac{n^2 + m^2}{m^2} \cdot y^2 = ax + x^2$, qui donne une hyperbole pour la Courbe de projection ſur le plan de la baſe. En ſubſtituant la valeur de y^2 dans l'équation de la ſurface conique, l'on aura $\frac{n^2}{m^2} \cdot ax - x^2 = \frac{n^2 + m^2}{m^2} \cdot z^2$, qui donne une Ellipſe pour la projection ſur le plan des x & des z. Ainſi la Courbe à double courbure eſt celle qui a pour Courbe de projection ſur le plan de la baſe une hyperbole, & pour Courbe de projection ſur le plan des x & des z une Ellipſe.

26. EXEMPLE II. Soient deux ſurfaces courbes ayant les mêmes axes, déſignées par les équations $y^3 = zx^2$ & $az = yx$, on demande les équations des projections de la Courbe à double courbure, qui feroit la ſection de ces deux ſurfaces. Prenant la valeur de z dans la ſeconde équation & la ſubſtituant dans la premiere, il vient $x^3 = ay^2$, équation de la Courbe de projection ſur le plan de la baſe.

Prenant ensuite la valeur de x dans la même équation & la substituant dans la premiere, il viendra $y^3 = \frac{a^2 z^3}{y^2}$, ou $y^5 = a^2 z^3$, pour l'équation de la Courbe de projection sur le plan des y & des z. En substituant la valeur de y dans la premiere équation, l'on aura $x^5 = a^3 z^2$ pour la Courbe de projection sur le plan des x & des z.

27. REMARQUE I. On peut voir par-là que pour connoître une Courbe à double Courbure, il faut avoir au moins deux équations qui renferment à elles deux les trois variables x, y, z; de sorte que les équations d'une Courbe à double courbure sont celles de ses Courbes de projection sur deux plans perpendiculaires l'un à l'autre.

28. REMARQUE II. Si ayant une Courbe à double courbure & une surface courbe, on veut savoir si la Courbe peut être décrite sur cette surface, il suffit de substituer d'abord la valeur d'une des inconnues, & ensuite la valeur de l'autre inconnue, prise de l'équation d'une des Courbes de projection, dans l'équation de la surface, pour voir s'il en résultera les équations des deux autres Courbes de projection.

29. REMARQUE III. Si l'équation d'une des Courbes de projection, que donnent les équations des deux surfaces courbes, dont l'intersection est supposée une Courbe à double courbure, est fausse ou imaginaire, comme si l'on trouvoit $x^2 + y^2 = -a^2$, ou $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \pm \sqrt{(-a^2)}$, c'est une marque que les surfaces ne se coupent pas. Si la projection se réduit à un point, les surfaces ne se toucheront qu'en un point. Si l'équation de projection a un facteur du second degré, dont les racines soient imaginaires, on aura un point conjugué; c'est-à-dire, que les surfaces se toucheront en un point qui appartiendra à la Courbe à double courbure. Si l'équation a deux facteurs simples réels & égaux, les surfaces se toucheront dans une ligne droite. Si l'équation a plusieurs facteurs non-simples égaux, en égalant à o un de ces facteurs qui sera au moins du second degré, on aura la projection de la ligne de contact. Si on doutoit qu'une Courbe dont on a les équations des trois Courbes de projection fût plane, en prenant l'équation générale du premier degré à trois variables (qui (17) dé-

ſigne une ſurface plane) $ax + by + cz + d = 0$, on ſubſtitueroit ſucceſſivement la valeur de chacune des deux variables priſe des équations d'une des Courbes de projection, pour voir s'il en peut réſulter celles des deux autres Courbes, ou bien des équations qui s'y puiſſent réduire en changeant la valeur des lettres conſtantes de l'équation générale ci-deſſus. Si cela arrive, la Courbe eſt plane; dans le cas contraire elle eſt à double courbure.

30. PROBLÊME. *Etant données les équations des trois Courbes de projection d'une Courbe à double courbure, décrire cette Courbe.* L'équation de la Courbe de projection ſur le plan de la baſe étant donnée, on decrira cette Courbe am (fig. 17). Sur cette Courbe, comme baſe, on élevera une ſurface cylindrique perpendiculaire au plan de la baſe, à chaque pm (y) on élevera le z, ou mn correſpondant, dont on déterminera la valeur par l'équation entre z & x, ou par l'équation entre y & z, & l'on fera paſſer par tous les points n, la Courbe à double courbure demandée. Il n'eſt pas difficile de voir qu'on pourroit ſe ſervir des autres Courbes de projection ſur les deux autres plans, ce qui n'a pas beſoin d'un plus grand détail. Si une certaine valeur de $ap = x$, ou de $pm = y$, donnoit z imaginaire, le point correſpondant n ſeroit imaginaire; c'eſt-à-dire, que la Courbe ſeroit interrompue dans ce point. Mais s'il en réſultoit une valeur négative de z, dans ce cas il faudroit tirer mn au-deſſous du plan de la baſe

31. PROBLÊME II. *On propoſe d'examiner la Courbe à double courbure, dont les Courbes de projection ſont ſur le plan de la baſe une ciſſoïde dont* A c *eſt l'axe*, A *le ſommet*, a *le diametre du cercle générateur*, & *ſur le plan des* y & *des* z *une hyperbole équilatere* & *dont les aſymptotes ſont* A r, AQ, & *dont la puiſſance eſt* $= a^2$ (fig. 18). L'on aura par conſéquent les équations $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$ & $a^2 = yz$, ou $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a - x)}}$ & $z = \frac{a^2}{y}$. Suppoſant $x = 0$, il vient $y = 0$ & $z = \frac{a^2}{0} = \infty$; donc la Courbe à double courbure ne rencontre l'axe des z qu'à l'infini; c'eſt-à-dire, que cet axe lui eſt aſymptote. Faiſant enſuite $x = a$, on a

$y = \infty$, & $z = \frac{a^2}{\infty} = 0$; de forte que la Courbe à double courbure a pour asymptote ck, qui est l'asymptote même de la cissoïde. x augmentant, y augmente aussi, mais z diminue & la Courbe va en descendant depuis l'asymptote Ar, jusqu'à l'asymptote ck, en s'éloignant à l'infini de l'axe Ac; & parce que y a deux valeurs égales, l'une positive, l'autre négative, & que la négative donne une valeur négative pour z, la Courbe à double courbure a encore une autre branche sS, égale & semblable à la précédente Nn, mais en dessous du plan de la base. Les asymptotes de cette branche sont les prolongements Ag, ch des asymptotes de l'autre branche.

32. Si l'on substitue la valeur de y, prise de l'équation $a^2 = yz$, dans la premiere $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, pour avoir la troisieme Courbe de projection désignée par l'équation $a^5 - a^4 x = x^3 z^2$, l'on trouvera encore deux autres branches. Ainsi pour avoir toutes les branches d'une Courbe à double courbure, il faut la considérer en employant ses trois Courbes de projection. Si les z correspondants aux y négatifs, par exemple, étoient imaginaires, la Courbe à double courbure n'auroit aucune branche du côté de ces y.

33. PROBLÊME. *Soit proposée d'examiner la Courbe à double courbure* (fig. 19), *qui a pour Courbe de projection sur le plan de la base, une parabole dont ap soit l'axe, a le sommet, & le parametre $= b$; & par conséquent l'équation $y^2 = bx$, & pour la Courbe de projection sur le plan raq, la Courbe de l'équation $b^2 z^2 = y^4 + b^2 y^2$.* Supposant $x = 0$, l'on a $y = 0$, & $z = 0$; donc la Courbe passe par le point a. Toutes les valeurs qu'on donne à x en augmentant, font augmenter celles de y & de z; donc la Courbe à double courbure va toujours en montant jusqu'à l'infini : car en supposant $x = \infty$, on trouve z infini, aussi-bien que y; & parce que les équations $y^2 = bx$, ou

$y = \pm \sqrt{(bx)}$ & $b^2 z^2 = y^4 + y^2 b^2$ ou $z = \pm \frac{y}{b}\sqrt{(y^2 + b^2)}$

donnent une valeur positive & une négative égales (l'une pour y, l'autre pour z), la Courbe à double courbure est composée de quatre parties égales & semblables, situées sur

la surface cylindrique élevée sur la parabole mag, deux sur la partie $ramt$, l'une au dessus, l'autre au dessous du plan de la base, & deux de même sur l'autre partie $ragt$. La Courbe de projection sur le plan rap, seroit une hyperbole équilatere, dont le sommet seroit en a, l'axe ap, & le centre en c distant de a de la quantité $\frac{b}{2}$.

34. REMARQUE. En tirant la ligne $am = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, on aura $am = z$; de sorte qu'en prenant toujours $mn = am$, on construira facilement la Courbe à double courbure.

35. PROBLÊME. *Soit enfin proposé d'examiner & de décrire la Courbe à double courbure qui a pour Courbes de projection sur le plan de la base, la parabole de l'équation $ax = y^2$, & sur le plan des x & des z la transcendante $z = n.l.ax$* (fig. 20). En substituant la valeur de x prise dans la premiere équation, on trouve $z = n.ly^2 = 2n.l.y$, pour la Courbe de projection sur le plan des y & des z. Cherchant (dans les tables) pour chaque $ap = x$ la valeur de $l.ax$ (en supposant, par exemple, $a = 10$, $x = 10$, $n = 3$, on aura $z = 3.l.100. = 3.2 = 6$), on trouvera aisément les z correspondants aux différentes abscisses ap. Faisant passer une Courbe par tous les points n ainsi trouvés, la Courbe à double courbure Tn, décrite sur la surface cylindrique élevée sur am perpendiculairement au plan de la base, sera d'autant plus exacte qu'on aura pris les z plus proches les uns des autres. Au reste l'on ne pourra avoir fort souvent que des valeurs approchées de z, parce que les logarithmes des tables ne sont la plupart exacts qu'à-peu-près. Mais parce que x augmentant à l'infini, son logarithme va toujours en augmentant, la Courbe à double courbure s'éloigne à l'infini du plan de la base & du point T. A cause de $a = 10$, si l'on fait $ab = \frac{1}{10}$, l'on aura $l.ax = l.1 = 0$; donc la Courbe Tn rencontrera la parabole au point T, extrémité de l'ordonnée bT. Et parce que les logarithmes $l.ax$ correspondants à $x < ba$ sont négatifs, & que $l.0 = -\infty$, la Courbe nT descendra au-dessous du plan de la base en s'approchant toujours de l'axe des z prolongé, qui sera son asymptote. Si l'on prend les y négatifs, l'équation $z = 2nl.y$ devient alors $z = 2nl.-y$; or le logarithme

d'une quantité négative est imaginaire * ; donc la Courbe n'a point de branches du côté des ordonnées négatives pg.

* En effet, parce que le logarithme de la racine est la moitié de celui du quarré, on doit avoir $l.\sqrt{(-1)}$, ou $L(-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} l. -1$, puisque -1 est le quarré de $\sqrt{(-1)}$; or $l.\sqrt{(-1)}$ est imaginaire; donc $\frac{1}{2} l. -1$ est aussi imaginaire. Soit supposé $l. -a = z$, on aura $l.(-a)^2 = 2 l. -a = 2z$; mais $l.(-a)^2 = l. a^2 = 2 l. a$, quantité réelle; d'où il paroît suivre que la quantité réelle $l\ a$ & la quantité imaginaire z feroient les moitiés de la même quantité réelle $l.\ a^2$: de sorte qu'un nombre pourroit avoir deux moitiés, l'une réelle, l'autre imaginaire; par conséquent le nombre a auroit également pour moitiés $\frac{a}{2}$ & $\frac{a}{2} + l. -1$. En effet le double de $\frac{a}{2}$ est $= a$, & le double de $\frac{a}{2} + l. -1$ est $= a + 2 l. -1 = a + l.(-1)^2 = a + l.\ 1 = a + 0$, à cause de $l.\ 1 = 0$. A cette occasion l'on peut remarquer que $+ l. -1 = - l. -1$; car $-1 = \frac{+1}{-1}$; donc $l. -1 = l.\ 1 - l. -1$, (par la nature des logarithmes) $= 0 - l. -1 = - l. -1$. Pour répondre à cette difficulté, supposons $z = l.\ a$, en multipliant le premier membre de cette équation par $l.\ c$, c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, l'on a, $z.\ l.\ c = l.\ a$; chassant les logarithmes, il vient $c^z = a$, ou $a = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} +$ &c. (2). Mais dans cette équation z aura à l'infini un exposant infini, & en transposant a dans le second membre, il viendra $0 = -a + 1 + z + \frac{z^2}{2}$ &c., équation qui donne une infinité de valeurs pour $z = l.\ a$; mais rien n'empêche de supposer qu'entre ces valeurs il n'y en a qu'une seule de réelle; donc rien n'empêche non-plus de supposer qu'un nombre a puisse avoir une infinité de logarithmes, dont un seul est réel, les autres étant imaginaires; ainsi un

Fig. 6.

Fig. 5.

Fig. 18.

Fig. 15.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 19.

Fig. 20.

Picquet Sculp.



36. REMARQUE. Les Courbes à double courbure peuvent être algébriques, ou transcendantes. Elles sont transcendantes si toutes leurs Courbes de projection ne sont pas algébriques ; mais elles seront algébriques si toutes leurs Courbes de projection sont algébriques.

---

même nombre ne peut avoir qu'un seul logarithme tabulaire réel ; car on trouve le logarithme tabulaire d'un nombre en multipliant le logarithme hyperbolique de ce nombre par un nombre réel. Il paroît même qu'on doit prendre une valeur de z imaginaire pour le nombre $l. + a = l. b^2$, si $+ a$ résulte de $- b \times - b$. Car alors $l. b^2 = 2 l. - b$; or $l. - b$ est imaginaire ; donc dans ce cas $l. + a$ est imaginaire, ce qui est un paradoxe assez singulier. Si l'on vouloit que les logarithmes des quantités négatives, ou ceux des quantités positives, qui résultent d'une quantité négative multipliée par elle-même, fussent réels & égaux à ceux des quantités positives égales, la Courbe de la fig. 20 auroit du côté des y négatifs deux parties, l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan de la base.

FIN du Tome second.

TABLE DES MATIERES

Contenues dans le Tome second.

FIN de la Table.

